ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

DISSERTATIONES

37

VON VEKTORRAUMISOMETRIEN INDUZIERTE VERBANDSISOMORPHISMEN ZWISCHEN NICHT ORTHOSTABILEN UND NICHT DISTRIBUTIVEN VEKTORRAUMVERBÄNDEN

LENNI HAAPASALO

HELSINKI 1981
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

DISSERTATIONES

37

VON VEKTORRAUMISOMETRIEN INDUZIERTE VERBANDSISOMORPHISMEN ZWISCHEN NICHT ORTHOSTABILEN UND NICHT DISTRIBUTIVEN VEKTORRAUMVERBÄNDEN

LENNI HAAPASALO

Abhandlung zur Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie wird mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jyväskylä am 12. Dezember 1981 um 12.15 im Hörsaal Paulaharju, Villa Rana, zur öffentlichen Verteidigung vorgelegt

HELSINKI 1981
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

ISSN 0355-0087
ISBN 951-41-0421-8

Received 26 August 1981

MULTIPRINT
HELSINKI 1981

**Verkkoversio julkaistu tekijän ja
Suomalaisen Tiedeakatemian luvalla.**

**URN:ISBN:978-952-86-0407-5
ISBN 978-952-86-0407-5 (PDF)**

Jyväskylän yliopisto, 2024

Vorwort

Die Anregung zu der vorliegenden Abhandlung verdanke ich Herrn Professor Dr. Herbert Gross. Für seine anspornenden Vorlesungen, seinen persönlichen Unterricht und seine unermüdliche Hilfsbereitschaft bei verschiedenen Stadien dieser Arbeit möchte ich ihm meinen herzlichen Dank aussprechen.

Mein tiefempfundener Dank gilt zugleich Herrn Professor Dr. Remo Moresi und Herrn Professor Dr. Hans Arwed Keller, die freundlicherweise das Manuskript durchgelesen haben.

Desgleichen spreche ich meinem vorherigen Lehrer, Herrn Professor Dr. Ilppo Simo Louhivaara, dessen Tätigkeit meine Verbindungen mit der Universität Zürich ermöglicht hat, meinen aufrichtigsten Dank aus.

Für die vielfache organisatorische Hilfe bei der Abschliessung der Arbeit möchte ich an Herrn Professor Dr. Olli Martio meinen besten Dank richten. Frau Eira Henriksson danke ich für die saubere und sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes.

Dem Mathematischen Institut der Universität Zürich spreche ich meinen Dank für die Möglichkeit aus, während der Sommersemester 1978 und 1979 meine Studien zu vertiefen. Meine Aufenthalte in Zürich wurden durch Unterstützung der Emil Aaltonen -Stiftung, des Finnischen Kulturfonds, der Schweizerischen Vereinigung der Freunde Finnlands (SVFF) und der Universität Jyväskylä ermöglicht. Allen diesen Organisationen bin ich für ihre Unterstützung zur grossen Dankbarkeit verpflichtet.

Schliesslich danke ich der Finnischen Akademie der Wissenschaften für die Aufnahme dieser Arbeit in die mathematische Dissertationenreihe ihrer Annalen.

Jyväskylä, im Oktober 1981

LENNI HAAPASALO

Inhalt

Einleitung

Eine besonders wichtige Rolle in der Theorie der unendlichdimensionalen quadratischen Räume spielen "Wittsche Sätze". Sie befassen sich mit den Verallgemeinerungen des klassischen Wittschen Satzes ([3], §4; [5], §I.11; [11]): Jede Isometrie $T_0: F \to \overline{F}$ zwischen zwei Teilräumen eines endlichdimensionalen Raumes E kann zu einer Isometrie $T: E \to E$ erweitert werden. Der Satz kann ohne Mühe für unendlichdimensionales E verallgemeinert werden, vorausgesetzt, dass die Teilräume F endlichdimensional bleiben ([10], Theorem 5). Die Fortsetzung einer gegebenen Isometrie zwischen unendlichdimensionalen Teilräumen auf den ganzen Raum, verlangt dagegen im allgemeinen so scharfe Voraussetzungen, dass es sinnvoller und nützlicher ist, das zugehörige <u>Kongruenzproblem</u> zu studieren, d.h. zu untersuchen, wann es überhaupt eine auf ganz E fortsetzbare Isometrie zwischen zwei vorgegebenen Teilräumen gibt. Man versucht also, ein vollständiges System von orthogonalen Invarianten für einen Teilraum F zu finden, welches die Lage von F in E bis auf Isometrien von E festlegt.

Eine grundlegende Bedeutung für diese Untersuchungen hat die folgende Kaplanskysche Vermutung gehabt (s. [10]): In einem abzählbardimensionalen alternierenden Raum E bilden die Indices des von F erzeugten orthostabilen Kaplanskyschen Verbandes (s. Diagramm 1 auf Seite 49) ein vollständiges System von orthogonalen Invarianten für F. (Unter den Indices versteht man die Dimensionen der Quotientenräume der benachbarten Elemente des Verbandes.) Eine Lösung der Kaplanskyschen Vermutung für alternierende Räume findet sich in der bemerkenswerten Arbeit von H. Gross ([8], Kap. IV; s. auch [6], Satz 4 oder [7]).

Der Hauptsatz von Gross besagt: Jeder Verbandsisomorphismus $\tau: V \to \overline{V}$ zwischen zwei endlichen distributiven Verbänden von Teilräumen von E, der die Indices erhält und mit dem Bilden der orthogonalen Komplemente vertauschbar ist, wird von einer Isometrie $T: E \to E$ induziert, d.h. $\tau X = T X$ für alle $X \in V$. Der Satz gilt sogar für gewisse unendliche vollständig distributive V.

Durch diesen Satz ist es möglich geworden, Kongruenzprobleme in vielen interessanten Fällen mit einem Schlage zu lösen. Wieviel Erfolg man aber mit diesen Verbandsmethoden hat, hängt sowohl vom Charakter des zum Problem gehörenden Verbandes (als auch von "arithmetischen" Invarianten des Raumes E) ab: will man die Existenz von Isometrien beweisen, welche gegebene Teilräume aufeinander abbilden, so steht man im allgemeinen vor der nicht zu bewältigenden Aufgabe, den von den gegebenen Räumen erzeugten orthostabilen Verband zu berechnen. Die Schwierigkeit beruht auf der Tatsache, dass der Verband im allgemeinen unendlich und nicht distributiv ist. (Eine bedeutsame Arbeit im Falle eines unendlichen Verbandes V stellt [1] dar.)

Das Ziel unserer Arbeit ist es, eine Verbandsmethode einzuführen, durch die man das entstehende Konstruktionsproblem in vielen Fällen ohne die Orthostabilität des Verbandes lösen kann. Unter dem Konstruktionsproblem versteht man die Aufgabe, die gewünschte Isometrie $T: E \to E$ mittels einer rekursiven Konstruktion zu finden. Anstatt nach unendlichen orthostabilen Verbänden zu suchen, reicht es nämlich oft aus, die Konstruktionsaufgabe für ganz einfache endliche Verbände zu lösen. Diesen wichtigen Vorteil erreicht man, wenn gewisse Indices des Verbandes als endlich vorausgesetzt werden dürfen.

Um uns auf die verbandstheoretischen Schwierigkeiten konzentrieren zu können, beschränken wir uns auf alternierende Räume.

Im ersten Teil der Arbeit wird unsere Verbandsmethode eingeführt. Der zweite Teil besteht aus Anwendungen der neuen Methode. Bei den Anwendungen wird auch die Technik studiert, mit der die nicht distributiven Stellen des Verbandes bei der rekursiven Konstruktion überwunden werden können.

1. Allgemeine Begriffe und Bezeichnungen

Wir betrachten einen Vektorraum E von abzählbarer Dimension über dem kommutativen Körper k (mit beliebiger Charakteristik), versehen mit einer alternierenden, nicht ausgearteten Bilinearform $\Phi: E \times E \to k$ (also $\Phi(x, x) = 0$ für alle $x \in E$). Die Teilräume von E werden mit der von Φ induzierten Form versehen. Ist F ein Teilraum von E (dies wird immer kurz mit $\subseteq$ bezeichnet), so nennen wir den Raum $F^{\perp} := \{x \in E \mid \Phi(x, f) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$ das <u>Orthogonalkomplement</u> von F in E. Wir sagen, dass der Teilraum F <u>nicht ausgeartet</u> ist, falls sein <u>Radikal</u> $\operatorname{rad} F := F \cap F^{\perp}$ gleich (0) ist (insbesondere gilt also $E^{\perp} = (0)$). Liegt F in $F^{\perp}$, so nennen wir F <u>totalisotrop.</u> Weil $F^{\perp\perp}$ der Abschluss von F bezüglich der von Φ induzierten linearen Topologie τ_{Φ} ist, nennen wir F <u>abgeschlossen,</u> falls $F = F^{\perp\perp}$ gilt. Liegt F in $G^{\perp}$, so sagen wir, dass die Teilräume F und G <u>senkrecht</u> aufeinander stehen und bezeichnen dies mit $F \perp G$. Stehen in $F \oplus G$ die Summanden senkrecht aufeinander, so schreiben wir kurz $F \oplus^{\perp} G$.

Zwei alternierende Räume (E, Φ) und $(\hat{E}, \hat{\Phi})$ sind <u>isometrisch,</u> falls eine <u>Isometrie</u> $T: (E, \Phi) \to (\hat{E}, \hat{\Phi})$, d.h. eine k-lineare Bijektion $T: E \to \hat{E}$ mit $\hat{\Phi}(Tx, Ty) = \Phi(x, y)$ für alle x, y in E existiert.

Eine beliebige Menge V von Teilräumen von E wird durch die Inklusion $\subseteq$ auf natürliche Weise teilweise geordnet. Enthält V für jede Teilmenge $\{F, G\} \subseteq V$ (das Supremum) $F + G$ und (das Infimum) $F \cap G$, so heisst V ein Vektorraumverband. Existieren Summen und Durchschnitte in V sogar für beliebige Teilmengen U von V, so ist V <u>ein vollständiger Verband.</u> Der Verband aller linearen Teilräumen von E ist vollständig und wird mit $L(E)$ bezeichnet.

Sei V' Teilverband von V. Fallen für jede Teilmenge U $\sup U$ in V' mit $\sup U$ in V und $\inf U$ in V' mit $\inf U$ in V zusammen, so heisst V' ein <u>vollständiger Teilverband</u> von V. Alle in dieser Arbeit betrachteten Verbände sind vollständige Teilverbände von $L(E)$. Jeder Vektorraumverband ist <u>modular,</u> d.h. die Bedingung $(F + G) \cap H = F + G \cap H$ für alle F, G und H von V mit $F \subseteq H$ gilt. Er heisst <u>distributiv,</u> falls die stärkere Bedingung $(F + G) \cap H = F \cap H + G \cap H$ für alle F, G und H von V gilt. Im allgemeinen hat V diese Eigenschaft nicht, ist also <u>nicht distributiv.</u>

Ein Element A von V heisst <u>orthostabil,</u> falls $A^{\perp}$ in V liegt. Enthält V nur orthostabile Elemente, so heisst er ein <u>orthostabiler Verband.</u> Der <u>von der Familie</u> $\{F_1, \ldots, F_k\}$ <u>erzeugte orthostabile Verband</u> ist der kleinste orthostabile Teilverband von $L(E)$, der $\{F_1, \ldots, F_k\}$ enthält und wird mit $V_s(F_1, \ldots, F_k)$ bezeichnet. Das Symbol $V_{+,\cap}(F_1, \ldots, F_k)$ bedeutet immer den kleinsten Verband, der

$\{F_1, \ldots, F_k\}$ enthält. Sind innerhalb eines Kontextes keine Missverständnisse darüber zu befürchten, welcher Verband gemeint ist, so schreiben wir $\mathcal{V}_n(F_1, \ldots, F_k)$ oder oft einfach $\mathcal{V}_n$, wo die natürliche Zahl n die Kardinalität der Menge $\mathcal{V}$ angibt.

Ein Element D von $\mathcal{V}$ heisst (+)-irreduzibel, falls $D = A + B$, $A, B \in \mathcal{V}$ nur dann gilt, wenn $D = A$ oder $D = B$. $D \in \mathcal{V}$ heisst (+)-prim, falls $D \subseteq A + B$, $A, B \in \mathcal{V}$ nur dann gilt, wenn $D \subseteq A$ oder $D \subseteq B$. Droht kein Missverständnis, so sagen wir kurz irreduzibel und prim. Ist D nicht irreduzibel, so heisst D reduzibel.

Ein Element D von $\mathcal{V}$ heisst kompakt, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: $D \subseteq \sum A_i$ für eine beliebige Familie $\{A_i\}$ in $\mathcal{V}$ impliziert, dass $D \subseteq A_1 + \ldots + A_n$ für endlich viele A_i. Ein vollständiger Verband $\mathcal{V}$ ist algebraisch, falls jedes Element von $\mathcal{V}$ eine Summe von kompakten Elementen ist. Der Verband $\mathcal{L}(E)$ ist offensichtlich algebraisch und folglich sind alle in dieser Arbeit betrachteten Verbände als vollständige Teilverbände von $\mathcal{L}(E)$ algebraisch (s. Lemma IV.4 in [8]).

Hat ein Element $D_0 \in \mathcal{V}$ die folgende Eigenschaft: $D_0 \subseteq D$ und es gibt kein $X \in \mathcal{V}$ mit $D_0 \subsetneqq X \subsetneqq D$, so heisst D_0 Vorgänger von D und wird mit $\overleftarrow{D}$ bezeichnet. Offensichtlich hat jedes von (0) verschiedene irreduzible Element $D \in \mathcal{V}$ einen eindeutigen Vorgänger $\overleftarrow{D}$. Die Indices von $\mathcal{V}$ sind die Dimensionen $\dim B/A$ der benachbarten Elemente von $\mathcal{V}$.

Die Teilverbände $\mathcal{V}$ und $\overline{\mathcal{V}}$ von $\mathcal{L}(E)$ sind isomorph, falls ein Verbandsisomorphismus $\tau: \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{V}}$ existiert, d.h. eine Bijektion mit der Bedingung $\tau(A) \subseteq \tau(B)$ genau dann wenn $A \subseteq B$. In dierser Arbeit wird jedes τ immer die Indices erhalten, also indextreu vorausgesetzt sein.

2. Der Hauptsatz

In diesem Kapitel wird eine Verallgemeinerung des Satzes IV.1 von [8] (s. auch Theorem 1 in [7]) bewiesen, wobei die Voraussetzung der Orthostabilität des Verbandes vermieden werden kann. Ferner wird der Satz so formuliert, dass man auch auf die Distributivität des Verbandes verzichten kann, wenn die nicht distributiven "Stellen" eine geeignete Lage im Verband aufweisen.

D e f i n i t i o n 2.1. *Seien* V , $\overline{V}$ *vollständige Teilverbände von* $L(E)$. *Ein Verbandsisomorphismus* $\tau: V \to \overline{V}$ *heisst* *Orthoisomorphismus,* *falls mit jedem orthostabilen* $A \in V$ *(und orthostabilen* $\tau A \in \overline{V}$ *) auch das Element* τA *(respektive* A *) orthostabil ist und für jedes orthostabile* $A \in V$ *gilt*

$$\tau(A^{\perp}) = (\tau A)^{\perp}$$

(insbesondere ist also mit τ *auch* τ^{-1} *Orthoisomorphismus).*

In dieser Arbeit wird jeder Orthoisomorphismus indextreu vorausgesetzt sein.

D e f i n i t i o n 2.2. *Seien* V , $\overline{V}$ *vollständige Teilverbände von* $L(E)$ *und sei* $\tau: V \to \overline{V}$ *ein Orthoisomorphismus. Ein* *Kandidat* *(oder Teilisometrie) bezüglich* τ *ist ein Tripel* $K = (W, T, \overline{W})$, *wo* W *und* $\overline{W}$ *endlichdimensionale Teilräume von* E *sind und* $T: W \to \overline{W}$ *eine Isometrie mit den folgenden Eigenschaften ist:*

(K1) $T(A \cap W) = \tau(A) \cap \overline{W}$ *für alle* $A \in V$.

(K2) $\bigcap_{i\in I} (W + A_i) = W + \bigcap_{i\in I} A_i$, *für eine beliebige Familie* $\{A_i\}$ *von* V .

(K3) $\bigcap_{i\in I} (\overline{W} + \overline{A}_i) = \overline{W} + \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$, *für eine beliebige Familie* $\{\overline{A}_i\}$ *von* $\overline{V}$.

Ein Kandidat $K_0 = (W_0, T_0, \overline{W}_0)$ *heisst ein* *Unterkandidat* *von* K , *falls* $W_0 \subseteq W$, $\overline{W}_0 \subseteq \overline{W}$ *und* $T_0 = T \mid W_0$ *gelten. Wir sagen auch, dass* K *eine* *Erweiterung* *von* K_0 *ist und bezeichnen dies mit* $K_0 \subseteq K$.

D e f i n i t i o n 2.3. *Sei* $\tau: V \to \overline{V}$ *ein Orthoisomorphismus zwischen Teilverbänden* V , $\overline{V} \subset L(E)$. *Dann heisst* τ *zulässig,* *falls eine Familie* F *von Kandidaten (bezüglich* τ *) existiert mit den folgenden Eigenschaften:* F *enthält (mindestens) einen Kandidaten* $K_1 = (W_1, T_1, \overline{W}_1)$ *derart, dass*

(1) Für alle $(+)$*-irreduziblen nicht primen Elemente* $D \in V$ *gibt es einen Unterkandidaten* $K_0 = (W_0, T_0, \overline{W}_0)$ *von* K_1 *mit* $D = \overleftarrow{D} \oplus W_0$.

(2) Für alle nicht orthostabilen $(+)$*-irreduziblen Elemente* $B \in V$ *ist wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(2.1) $B \subseteq W_1$,

(2.2) $\overleftarrow{B}$ *ist orthostabil und es gibt einen Unterkandidaten* $K_0 = (W_0, T_0, \overline{W}_0)$ *von* K_1 *mit* $B = \overleftarrow{B} \oplus W_0$,

(2.3) $B^{\perp} \subseteq W_1$ *und* $T_1(B^{\perp}) = (\tau B)^{\perp}$.

Notation. Wir werden oft die Bilder τA unter $\tau: V \to \overline{V}$ kurz mit $\overline{A}$ bezeichnen.

Satz 2.4 (der Hauptsatz). *Sei* (E, Φ) *ein nicht ausgearteter alternierender Raum von abzählbarer Dimension und seien* V, $\overline{V}$ *vollständige Teilverbände von* $L(E)$. *Sei ferner* $\tau: V \to \overline{V}$ *ein indextreuer Orthoisomorphismus. Dafür, dass* τ *von einer Vektorraumisometrie* $T: E \to E$ *induziert wird, ist hinreichend, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(I) Die kompakten Elemente von V *sind Summen von den* $(+)$*-irreduziblen Elementen.*

(II) τ *ist zulässig.*

Bevor wir den Beweis des Satzes beginnen, machen wir die folgenden Vorbereitungen:

Bemerkung 1. Ist A ein beliebiges Element von V, so gibt es kompakte Elemente $K_i \in V$, $i \in I$, mit $A = \sum_{i\in I} K_i$. Wegen der Bedingung (I) des Satzes können wir jedes K_i als (endliche) Summe der irreduziblen Elemente D_{ij} schreiben:

$$A = \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{p_i} D_{ij}, \qquad p_i < \infty .$$

Wegen

$$A^{\perp} = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{p_i} D_{ij}^{\perp}$$

genügt es, die Orthostabilität nur für die irreduziblen Elemente zu betrachten.

Bemerkung 2. Erfüllt ein Element B die Bedingung (2) in Definition 2.3, so nennen wir es quasistabil[1]; ein nicht primes Element, das die Bedingung (1) in Definition 2.3 erfüllt, wird quasiprim genannt. Wir sagen auch, dass die irreduziblen Elemente mit (1) und (2) vom erlaubten Typ sind. Der Hinweis auf F (oder K_0, K_1) wird dabei meistens unterdrückt. Ebenso nennen wir einen Verband $V \subset L(E)$, dessen nicht stabile Elemente alle vom erlaubten Typ sind, kurz quasistabil.

Lemma 2.5. *Sei* K_1 *der in Definition 2.3 erwähnte Kandidat und* $K := (W, T, \overline{W})$ *eine beliebige Erweiterung von* K_1. *Dann gilt*

---

[1] In Tabellen werden wir quasistabile Elemente kurz mit dem Symbol (q) und quasiprime Elemente mit (qq) bezeichnen.

(L1) $T(W \cap A^{\perp}) = \overline{W} \cap \overline{A}^{\perp}$, *für alle* $A \in V$.

Beweis des Lemmas. Nach Bemerkung 1 genügt es zu zeigen, dass (L1) für alle irreduziblen Elemente A von V gilt.

Ist A orthostabil, so folgt die Behauptung sofort aus der Definition 2.2, weil $A^{\perp}$ ein Element von V ist. Sei also A nicht orthostabil.

Ist die Voraussetzung (2.1) oder (2.2) in Definition 2.3 erfüllt, so gibt es einen Unterkandidaten $K_0 = (W_0 , T_0 , \overline{W}_0)$ von K derart, dass $A = \overleftarrow{A} \oplus W_0$ mit $\overleftarrow{A}$ orthostabil oder $\overleftarrow{A} \subseteq W_1$. Ist $\overleftarrow{A} \subseteq W_1$, so ist (L1) trivialerweise erfüllt, und ist $\overleftarrow{A}$ stabil, so schliessen wir wie im orthostabilen Fall, dass

$$\begin{aligned} T(W \cap A^{\perp}) &= T(W \cap \overleftarrow{A}^{\perp} \cap W \cap W_0^{\perp}) = \overline{W} \cap \overline{\overleftarrow{A}}^{\perp} \cap \overline{W} \cap \overline{W}_0^{\perp} \\ &= \overline{W} \cap (\overline{\overleftarrow{A}} \oplus \overline{W}_0)^{\perp} = \overline{W} \cap \overline{A}^{\perp} \end{aligned}$$

gilt.

Ist die Voraussetzung (2.3) in Definition 2.3 erfüllt, dann folgt (L1) aus der Beziehung

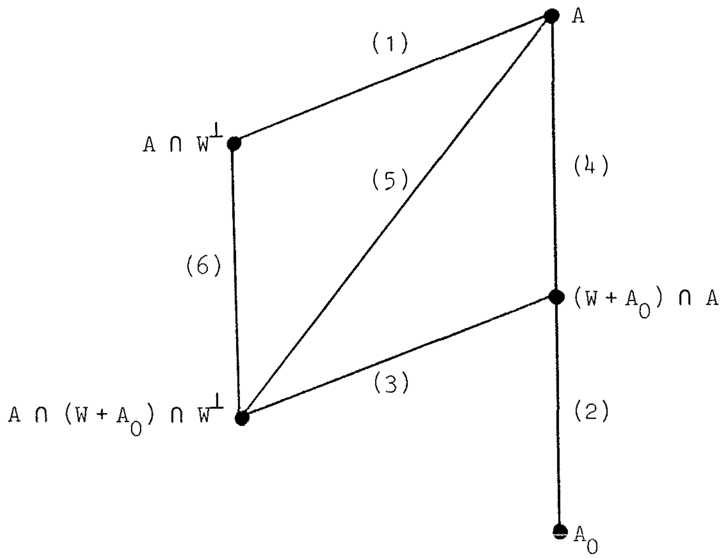
$$T(W \cap A^{\perp}) = T(A^{\perp}) = \overline{A}^{\perp} = \overline{W} \cap \overline{A}^{\perp} .$$

Lemma 2.6. *Sei* $K = (W , T , \overline{W})$ *ein Kandidat. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\dim((A \cap W^{\perp}) / (A \cap (W + A_0) \cap W^{\perp})) \\ &= \dim((\overline{A} \cap \overline{W}^{\perp}) / (\overline{A} \cap (\overline{W} + \overline{A}_0) \cap \overline{W}^{\perp})) \end{aligned}$$

für alle $A_0 , A \in V$ *mit* $A_0 \subseteq A$.

Beweis. Wir werden die Dimensionen in sechs Etappen (wie in [8], Seiten 115-116) am folgenden Diagramm berechnen:



(1°) Weil

$$\dim((A + W^{\perp}) / W^{\perp}) \leqq \dim(E / W^{\perp}) = \dim(W) < \infty ,$$

und weil $W^{\perp}$ abgeschlossen ist, gilt wegen der Modularität

$$\dim(A / A \cap W^{\perp}) = \dim((A + W^{\perp}) / W^{\perp}) = \dim(W^{\perp\perp} / (A + W^{\perp})^{\perp})$$
$$= \dim(W / W \cap A^{\perp}) .$$

Nach Lemma 2.5 ist

$$\dim(W / W \cap A^{\perp}) = \dim(\overline{W} / \overline{W} \cap \overline{A}^{\perp}) .$$

Gehen wir in der umgekehrten Richtung zurück, so bekommen wir die Gleichung

(1) $$\dim(A / A \cap W^{\perp}) = \dim(\overline{A} / \overline{A} \cap \overline{W}^{\perp}) , \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{V} .$$

(2°) Weil $(W , T , \overline{W})$ ein Kandidat ist, gilt

(2) $$\dim(((A_0 + W) \cap A) / A_0) = \dim((W \cap A + A_0) / A_0)$$
$$= \dim((W \cap A) / (W \cap A_0)) = \dim((\overline{W} \cap \overline{A}) / (\overline{W} \cap \overline{A}_0))$$
$$= \dim((\overline{W} \cap \overline{A} + \overline{A}_0) / \overline{A}_0) = \dim(((\overline{A}_0 + \overline{W}) \cap \overline{A}) / \overline{A}_0) .$$

(3°) Wie in (1°) schliessen wir die folgenden Gleichungen:

(3)
$$\begin{aligned}
&\dim(((W+A_0)\cap A)/((W+A_0)\cap A\cap W^\perp))\\
&= \dim(((W+A_0)\cap A+W^\perp)/W^\perp) = \dim((A_0+W\cap A+W^\perp)/W^\perp)\\
&= \dim(W^{\perp\perp}/(A_0+W^\perp+W\cap A)^\perp)\\
&= \dim(W/((W\cap A_0{}^\perp)\cap W\cap (W\cap A)^\perp))\\
&= \dim(\overline{W}/((\overline{W}\cap \overline{A}_0{}^\perp)\cap \overline{W}\cap (\overline{W}\cap \overline{A})^\perp)) = \ldots\\
&= \dim(((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A})/(\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}\cap \overline{W}^\perp)\ .
\end{aligned}$$

(4°) Weil τ indextreu ist, erhalten wir nach (2):

(4)
$$\begin{aligned}
&\dim(A/((W+A_0)\cap A)) = \dim(A/A_0) - \dim(((W+A_0)\cap A)/A_0)\\
&= \dim(\overline{A}/\overline{A}_0) - \dim(((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A})/\overline{A}_0)\\
&= \dim(\overline{A}/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}))\ .
\end{aligned}$$

(5°) Nach den Gleichungen (3) und (4) folgt also

(5)
$$\begin{aligned}
&\dim(A/((W+A_0)\cap A\cap W^\perp))\\
&= \dim(A/((W+A_0)\cap A)) - \dim(((W+A_0)\cap A)/((W+A_0)\cap A\cap W^\perp))\\
&= \dim(\overline{A}/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A})) - \dim(((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A})/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}\cap \overline{W}^\perp))\\
&= \ldots = \dim(\overline{A}/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}\cap \overline{W}^\perp))\ .
\end{aligned}$$

(6°) Nach der Substraktion gilt wegen (1) und (5) schliesslich (L1):

(6)
$$\begin{aligned}
&\dim((A\cap W^\perp)/((W+A_0)\cap A\cap W^\perp))\\
&= \dim(A/((W+A_0)\cap A\cap W^\perp)) - \dim(A/(A\cap W^\perp))\\
&= \dim(\overline{A}/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}\cap \overline{W}^\perp)) - \dim(\overline{A}/(\overline{A}\cap \overline{W}^\perp))\\
&= \ldots = \dim((\overline{A}\cap \overline{W}^\perp)/((\overline{W}+\overline{A}_0)\cap \overline{A}\cap \overline{W}^\perp))\ .
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes 2.4. Wir beginnen mit K_1 und werden rekursiv eine Kette $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$ von Kandidaten $K_i = (W_i, T_i, \overline{W}_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) so konstruieren, dass $\bigcup W_i$ und $\bigcup \overline{W}_i$ mit ganz E zusammenfallen. Durch diese rekursive Konstruktion wird eine Isometrie $T\colon E \to E$ mit den gewünschten Eigenschaften geliefert. Wir können annehmen, dass wir schon die Kandidaten $K_1, K_2, \ldots, K_p$ konstruiert haben. Um den nächsten Schritt auszuführen, bezeichnen wir kurz $W := W_p$, $\overline{W} := \overline{W}_p$ und $T := T_p$.

Wir haben also das folgende <u>Konstruktionsproblem</u> zu lösen: Für einen gegebenen Vektor $x \in E \setminus W$ haben wir einen solchen Vektor $\overline{x} \in E \setminus \overline{W}$ zu finden, dass T sich zu einer Isometrie $T_1 : W \oplus (x) \to \overline{W} \oplus (\overline{x})$ erweitern lässt. Weiterhin soll $(W \oplus (x), T_1, \overline{W} \oplus (\overline{x}))$ eine Erweiterung von $(W, T, \overline{W})$ sein. Wir definieren den Filter

$$M := M(x, W) := \{Z \in V \mid x \in W + Z\} .$$

Als ein Filter des vollständigen Verbandes V ist M ein Hauptfilter. Sei $D := D(x, W)$ der Erzeuger von M. D ist ein kompaktes Element von V.

Wir führen die Konstruktion zuerst in dem Fall durch, dass D irreduzibel ist (Fall (A)). Die Konstruktion lässt sich danach leicht für den allgemeinen Fall (Fall (B)) erweitern. Dies beruht auf der Tatsache, dass D nach der Voraussetzung (I) eine endliche Summe von irreduziblen Elementen ist.

Fall (A). Sei D ein irreduzibles Element von V. Nach der Wahl von K_1 wird kein von den nicht primen irreduziblen Elementen den Filter M erzeugen, also ist D prim. Ferner ist D verschieden von seinem Vorgänger

$$\overleftarrow{D} = \sum \{Z \in V \mid Z \subsetneqq D\} ,$$

und wegen $x \in W + D$ können wir annehmen, dass x in D liegt.

Um den Kandidaten $(W, T, \overline{W})$ zu einem Kandidaten $(W_1, T_1, \overline{W}_1)$ mit $W_1 = W \oplus (x)$ und $\overline{W}_1 = W \oplus (\overline{x})$ zu erweitern, haben wir also einen Vektor x in E zu finden mit $\overline{x} \in \overline{D} \setminus (\overline{W} + \overleftarrow{\overline{D}})$. Offensichtlich muss $\overline{D}$ der Erzeuger des Filters $M(\overline{x}, \overline{W})$ sein. Zerlegen wir W in

$$W = W \cap D^{\perp} \oplus F \qquad \text{mit } F = (f_i)_{i=1}^{n} ,$$

so können wir nach Lemma 2.5 $\overline{W}$ in

$$\overline{W} = \overline{W} \cap \overline{D}^{\perp} \oplus T(F) \qquad \text{mit } T(F) = (T f_i)_{i=1}^{n}$$

aufspalten. Wegen der Beziehung $\overline{D}^{\perp} \cap T(F) = (0)$ gibt es nach dem Lemma von Kaplansky (s. [8], Lemma I.8 oder [10], Lemma 5) einen Vektor $y' \in \overline{D}$

derart, dass

$$\Phi(y', Tf_i) = \Phi(x, f_i)$$

für alle $i = 1, \dots, n$, und somit

$$\Phi(y', \overline{W}) = \Phi(x, W)$$

gilt.

Liegt y' in $\overline{\mathcal{D}} \setminus (\overleftarrow{\overline{\mathcal{D}}} + \overline{W})$, so können wir offenbar x auf y' abbilden und $W_1 := W \oplus (x)$, $\overline{W}_1 := \overline{W} \oplus (y')$ definieren.

Sei jetzt aber $y' \in (\overleftarrow{\overline{\mathcal{D}}} + \overline{W})$, also $y' = d_0 + \overline{w}$ für ein $\overline{d}_0 \in \overleftarrow{\overline{\mathcal{D}}}$ und ein $\overline{w} \in \overline{W} \cap \overline{\mathcal{D}}$. Wir spalten jetzt $\overline{W}$ in

$$\overline{W} = \overline{W} \cap \overleftarrow{\overline{\mathcal{D}}}^{\perp} \oplus \overline{G} \qquad \text{mit} \quad \overline{G} = (\overline{g}_i)_{i=1}^{r} .$$

Unabhängig davon, ob $\overleftarrow{\mathcal{D}}$ orthostabil ist oder nicht, können wir wieder nach Lemma 2.5 wie folgt schliessen:

$$W = W \cap \overleftarrow{\mathcal{D}}^{\perp} \oplus T^{-1}(\overline{G}) \qquad \text{mit} \quad T^{-1}(\overline{G}) = (T^{-1}\overline{g}_i)_{i=1}^{r} .$$

Es gibt also einen Vektor d in $\overleftarrow{\mathcal{D}}$ mit

$$\Phi(d, T^{-1}\overline{g}_i) = \Phi(\overline{d}_0, g_i), \qquad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, r .$$

Wegen

$$\begin{aligned} \Phi(-x + d + T^{-1}\overline{w}, W) &= -\Phi(x, W) + \Phi(\overline{d} + \overline{w}, \overline{W}) \\ &= -\Phi(y', \overline{W}) + \Phi(y', \overline{W}) = 0 \end{aligned}$$

steht der Vektor $x_0 := -x + d + T^{-1}\overline{w}$ senkrecht auf W. Ferner, wegen $x_0 \notin W + \overleftarrow{\mathcal{D}}$ gilt die Ungleichung

$$\dim((\mathcal{D} \cap w^{\perp}) / ((\mathcal{D} \cap W^{\perp}) \cap (\overleftarrow{\mathcal{D}} + W))) \neq 0 .$$

Nach Lemma 2.6 gibt es einen Vektor $0 \neq t \in \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{W}^{\perp} \setminus (\overleftarrow{\overline{\mathcal{D}}} + \overline{W})$. Es gilt

$$\Phi(y' + t, \overline{W}) = \Phi(y', \overline{W}) = \Phi(x, W),$$

so dass wir T zu einer Isometrie $T_1 \colon W \oplus (x) \to \overline{W} \oplus (\overline{x})$ erweitern können indem wir x auf $\overline{x} := y' + t$ abbilden.

Wir beweisen als nächstes, dass $\mathcal{K}_1 := (W_1, T_1, \overline{W}_1)$ ein Kandidat ist. Für den Beweis von (K1) sei A ein beliebiges Element von $\mathcal{V}$. Weil $\mathcal{D}$ der Erzeuger von $M(x, W)$ ist, können wir wie folgt argumentieren: Im Falle $\mathcal{D} \subseteq A$ gilt $\bar{x} \in \bar{\mathcal{D}} \subseteq \bar{A}$ und somit $T_1(W_1 \cap A) = T_1((W \cap A) \oplus (x)) = \bar{W} \cap \bar{A} \oplus (\bar{x}) = \bar{W}_1 \cap \bar{A}$. Im Falle $\mathcal{D} \nsubseteq A$ gilt $\bar{\mathcal{D}} \nsubseteq \bar{A}$ und deshalb $T_1(W_1 \cap A) = T_1(W \cap A) = \bar{W} \cap \bar{A} = \bar{W}_1 \cap \bar{A}$. Also ist (K1) erfüllt.

Der Beweis von (K2) fordert auch zwei Etappen. Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Elementen von $\mathcal{V}$.

Nehmen wir zuerst an, dass A_i für alle i in M liegt, so gilt auch $\bar{A}_i \in \bar{M}$ für alle i, und somit

$$\bigcap_{i\in I} (W_1 + A_i) = \bigcap_{i\in I} (W + A_i) = W + \bigcap_{i\in I} A_i = W_1 + \bigcap_{i\in I} A_i .$$

Dieselbe Argumentation lässt sich auch für die Familie $\{\bar{A}_i\}$ wiederholen.

Wir nehmen jetzt an, dass es wenigstens ein $k \in I$ gibt mit $A_k \notin M$. Es ist hinreichend, die Inklusion

$$\bigcap_{i\in I} (W_1 + A_i) \subseteq W_1 + \bigcap_{i\in I} A_i$$

zu beweisen, da die umgekehrte Inklusion trivial ist. Sei $d = w_i + \lambda_i x + a_i$ ein beliebiger Vektor von $\bigcap_{i\in I} \{ W_1 + A_i \mid A_i \in \mathcal{V}, A_i \notin M \}$. Wäre jetzt $\lambda_j \neq \lambda_k$ für ein j, dann würde aus der Gleichung $0 = (w_k - w_j) + (\lambda_k - \lambda_j) x + a_k - a_j$ folgen, dass x in $W + (A_k + A_j)$ liegt. Das ist aber unmöglich, weil $(\mathcal{D})$ ein Primfilter ist und weder A_k noch A_j in M liegt. Also gilt

$$\begin{aligned} d - \lambda_k x &\in \bigcap_{i\in I} \{ (W + A_i) \mid A_i \in \mathcal{V}, A_i \notin M \} \\ &= W + \bigcap_{i\in I} \{ A_i \in \mathcal{V} \mid A_i \notin M \} \end{aligned}$$

und hiermit auch

$$d \in W_1 + \bigcap_{i\in I} \{ A_i \in \mathcal{V} \mid A_i \notin M \} .$$

Die Konstruktion ist fertig im Falle eines irreduziblen $\mathcal{D}$.

Fall (B). Sei $\mathcal{D}$ ein reduzibles Element von $\mathcal{V}$. Aus der Voraussetzung (I) folgt, dass $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \ldots + \mathcal{D}_n$ eine Summe von endlichvielen irreduziblen Elementen $\mathcal{D}_i \in \mathcal{V}$ ist. Diese Summe können wir irredundant annehmen, also

$$\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_1 + \dots + \mathcal{D}_{k-1} + \mathcal{D}_{k+1} + \dots + \mathcal{D}_n$$

für alle k . Wir zerlegen x in $x = x_1 + \dots + x_n$ mit $x_i \in \mathcal{D}_i$ und definieren $\mathcal{D}_{11} := \mathcal{D}(x_1, W)$. Aus den offensichtlichen Beziehungen $\mathcal{D}_{11} \subseteq \mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_n \in M(x, W)$ folgt die Gleichung $\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_1 + \dots + \mathcal{D}_n$, aus der Modularität die Gleichung $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1 \cap (\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_1 \cap (\mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_n)$, und aus der Irreduzibilität von $\mathcal{D}_1$ folgt $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{11}$. Dies besagt, dass $\mathcal{D}(x_1, W)$ irreduzibel ist, sodass wir $(W, T, \overline{W})$ zu $(W_1, T_1, \overline{W}_1)$ erweitern können indem wir $\overline{W}_1 = \overline{W} \oplus (\overline{x}_1)$ nach Fall (A) finden. Wiederholen wir die Argumentation, so sehen wir dass $\mathcal{D}(x_j, W_{j-1}) = \mathcal{D}_j$ für alle $1 \leq j \leq n$ gilt. Die Konstruktionsaufgabe wird gelöst, wenn wir den Prozess von Fall (A) n Mal wiederholen.

Der Hauptsatz ist bewiesen.

3. <u>Anwendungen</u>

3.1. <u>Vorbemerkungen</u>

Durch den eben bewiesenen Hauptsatz ist es möglich geworden, die Existenz von gewünschten Isometrien in vielen Fällen zu beweisen, ohne dass man den zu Problem gehörenden orthostabilen Verband kennt. Dieses Kapitel besteht aus einigen solchen Anwendungen. Es ist praktisch, die folgenden Lemmata zu benutzen.

L e m m a 3.1. *Seien* V *und* $\overline{V}$ *zwei zu einem Konstruktionsproblem gehörende Verbände mit dem indextreuen Orthoisomorphismus* $\tau: V \to \overline{V}$. *Ferner seien* $X_i \subseteq Y_i$, $i = 1, \dots, n$, *benachbarte Elemente von* V *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $\dim Y_i / X_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$,

(2) $Y_i = X_i \oplus A_i$, $i = 1, \dots, n$,

(3) $A_i \cap (\oplus_{j \neq i} A_j) = (0)$.

Hinreichend dafür, dass Supplemente $\overline{A}_i$ *von* $\overline{X}_i$ *in* $\overline{Y}_i$, $i = 1, \dots, n$, *mit einer Isometrie*

$$\psi: \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$

existieren ist, dass $\overline{V}$ *ein Element* $\overline{V}$ *mit den folgenden Eigenschaften* *enthält:*

(4) $\overline{V} \subseteq \cap_{i=1}^{n} \overline{X}_i$,

(5) $\overline{V}^{\perp} \cap (\sum_{i=1}^{n} \overline{K}_i) = (0)$ *für beliebige Supplemente* K_i *von* X_i *in* Y_i .

Beweis. Seien $A_i{*}$, $i = 1, \dots, n$, beliebige "provisorische" Supplemente von $\overline{X}_i$ in $\overline{Y}_i$ und seien

$$A_i = (a_{ik})_{k=1}^{p_i} , \qquad A_i{*} = (a_{ik}')_{k=1}^{p_i}$$

für $i = 1, \dots, n$. Zuerst definieren wir eine Isometrie

$$\psi_1 : (a_{11}) \to (\overline{a_{11}})$$

indem wir a_{11} auf $a_{11}' =: \overline{a_{11}}$ abbilden. Falls

$$\Phi(a_{12}', \overline{a_{11}}) = \Phi(a_{12}, a_{11})$$

gilt, so lässt sich ψ_1 zu $\psi_2 : (a_{11}) \oplus (a_{12}) \to (\overline{a_{11}}) \oplus (\overline{a_{12}})$ erweitern indem a_{12} auf $\overline{a_{12}} := a_{12}'$ abgebildet wird. Andernfalls haben wir den Vektor a_{12}' zu korrigieren. Weil das Element $\overline{V} = \tau(V)$ auch die Bedingung (5) für beliebige Supplemente $K_i{*}$ von $\overline{X}_i$ in $\overline{Y}_i$ erfüllt, gibt es nach dem Lemma von Kaplansky (S. [8], Lemma I.8) einen Vektor $x_{12} \in \overline{V}$ mit

$$\Phi(x_{12}, \overline{a_{11}}) = \Phi(a_{12}, a_{11}) - \Phi(a_{12}', \overline{a_{11}}) .$$

Ferner, wegen $x_{12} \in \overline{V} \subseteq \overline{X}_1$, liegt der Vektor $\overline{a_{12}} := a_{12}' + x_{12}$ in einem Supplement von $\overline{X}_1$ in $\overline{Y}_1$ und $\{\overline{a_{11}}, \overline{a_{12}}\}$ ist linear unabhängig. Die Abbildung ψ_1 wird zu einer Isometrie $\psi_2 : (a_{11}) \oplus (a_{12}) \to (\overline{a_{11}}) \oplus (\overline{a_{12}})$ erweitert indem a_{12} auf $\overline{a_{12}}$ abgebildet wird. Wir wiederholen den Prozess p_1 Mal und definieren

$$\overline{A}_1 := (\overline{a_{ik}})_{k=1}^{p_1} ,$$

das mit A_1 isometrisch ist.

Um den allgemeinen Schritt darzustellen schreiben wir

$$A = \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1} A_i \right) \bigoplus_{j=1}^{s} (a_{rj}) ; \qquad s < p_r ,$$

und setzen voraus, dass wir schon die Supplemente $\overline{A}_i$, $i = 1, \dots, r-1$ und die Vektoren $\overline{a_{rj}}$, $j = 1, \dots, s$ mit einer Isometrie

$$\psi_t : A \to (\oplus \overline{A_i}) \oplus (\oplus (\overline{a_{rj}})) =: \overline{A}$$

($t := \dim A = p_1 + \ldots + p_{r-1} + s$) gefunden haben. Gilt nun

$$\Phi(a_{rs+1}', \overline{A}) \neq \Phi(a_{rs+1}, A) ,$$

so können wir wieder einen Korrekturvektor $x_{rs+1} \in \overline{V} \subseteq \overline{X}_r$ mit

$$\Phi(x_{rs+1}, A) = \Phi(a_{rs+1}, A) - \Phi(a_{rs+1}', \overline{A})$$

finden und danach a_{rs+1} auf $\overline{a_{rs+1}} := a_{rs+1}' + x_{rs+1}$ abbilden. Auf diese Weise wird ψ_t zu einer Isometrie ψ_{t+1} erweitert.

Wir wiederholen den Prozess, bis die gewünschte Isometrie konstruiert ist. Man bemerke, dass wir wirklich die Bedingung (5) für beliebige Supplemente K_i^* fordern müssen, weil wir während des Prozesses immer nach dem Korrektur ein reduziertes Supplement modulo $\overline{V}$ haben.

Im folgenden kommen wir oft in die Lage, explizite Supplemente A_i von Räumen X_i in entsprechenden Oberräumen Y_i einzuführen. Wir haben dabei oft die im obigen Lemma beschriebene Situation.

Wir werden oft stillschweigend das folgende triviale Lemma benutzen.

L e m m a 3.2. *Zwei endlichdimensionale alternierende Räume sind genau dann isometrisch, wenn ihre Radikale die gleichen Dimensionen haben.*

3.2. Über geschachtelte Paare (F , G)

In diesem Kapitel betrachten wir geschachtelte Paare $G \subseteq F \subseteq E$, $\overline{G} \subseteq \overline{F} \subseteq E$ und fragen nach Isometrien $T: E \to E$ mit $T(F) = \overline{F}$ und $T(G) = \overline{G}$. Um unsere Verbandsmethode mit zulässigem Orthoisomorphismus darzustellen, beginnen wir mit dem trivialen Fall eines endlichdimensionalen G.

Wir berechnen zuerst den von F erzeugten Kaplanskyschen Verband $V_{14}(F)$ in Diagramm 1 (Seite 49) (s. auch [6], S. 147 oder [10], S. 11). Durch die Indices des Verbandes V_{14} wird die Bahn von F charakterisiert.

Um das System orthogonaler Invarianten des Paares (F , G) zu bestimmen, haben wir einen zu diesen Voraussetzungen assoziierten Teilverband V_n von $V_s(F, G)$ zu finden. Beim Suchen eines solchen Verbandes ist es oft praktisch, einen "Algorihtmus" von folgender Art zu benutzen: Wir beginnen mit einem geeigneten Verband $V(F)$, $V(G)$ oder $V(F, G)$ (oben mit dem Kaplanskyschen Verband) und setzen voraus, dass wir gleichzeitig den entsprechenden Verband mit Balken (d.h. $\overline{V}(\overline{F})$, $\overline{V}(\overline{G})$ oder $\overline{V}(\overline{F}, \overline{G})$ haben. In jedem Schritt testen wir die irreduziblen Elemente des Verbandes. Das gestellte Problem wird gelöst, falls wir schliesslich einen orthostabilen oder quasistabilen Teilverband $V_k(F, G) \subseteq V_s(F, G)$ haben, dessen irreduziblen Elemente bezüglich eines zulässigen Orthoisomorphismus $\tau\colon V_k(F, G) \to \overline{V}_k(\overline{F}, \overline{G})$ vom erlaubten Typ sind. Für diesen Verband hat dann die Abbildungsaufgabe (oder Konstruktionsaufgabe) eine Lösung, d.h. eine den Orthoisomorphismus τ erzeugende Isometrie $T\colon E \to E$ lässt sich definieren.

Im obigen Fall fügen wir zuerst in den Kaplanskyschen Verband $V_{14}(F)$ das Element G zu, und erhalten danach den Verband $V_{20}(F, G)$ in Diagramm 2 auf Seite 49. Setzen wir also G endlichdimensional voraus, so können wir die Abbildungsaufgabe bereits für diesen Verband lösen, wenn wir die offensichtlich notwendige Bedingung

$$\dim G \cap G^{\perp} = \dim \overline{G} \cap \overline{G}^{\perp}$$

stellen. (Man betone, dass also $\operatorname{rad} G$ nicht notwendigerweise ein Element des Verbandes sein muss.) Wegen Lemma 3.2 gibt es nämlich dann einen Kandidaten $(G, T_1, \overline{G})$, sodass G und $G \cap F^{\perp}$ vom erlaubtem Typ (gemäss Definition 2.3) sind.

Wir haben als nächstes einige hinreichende Bedingungen für F und G eingeführt, dafür dass eine Isometrie $T\colon E \to E$ mit $T(F) = \overline{F}$ und $T(G) = \overline{G}$ existiere.

S a t z 3.3. *Es gelte*

$$G \subset F = F^{\perp\perp} \subseteq E \quad \textit{und} \quad \overline{G} \subset \overline{F} = \overline{F}^{\perp\perp} \subseteq E\,;$$

ferner sei mindestens eine der folgenden sechs Bedingungen erfüllt:

(A) $\dim((G + F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} / (G + F \cap F^{\perp})^{\perp\perp}) < \infty$

(d.h. $\dim((G^{\perp} \cap (F \cap F^{\perp})^{\perp}) / (G^{\perp} \cap (F \cap G^{\perp})^{\perp})) < \infty$*)*

und $(F^{\perp} + G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq F^{\perp} + G^{\perp\perp} \cap G^{\perp}$, *(B)* $\dim((F^{\perp} + F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} / (F^{\perp} + G^{\perp\perp} \cap G^{\perp})^{\perp\perp}) < \infty$

(d.h. $\dim((F \cap (G^{\perp\perp} \cap G^{\perp})^{\perp}) / (F \cap (F \cap G^{\perp})^{\perp})) < \infty$*)*

und $(F^{\perp} + G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq F^{\perp} + G^{\perp\perp} \cap G^{\perp}$,

(C) $\dim((F^{\perp} + F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} / (F^{\perp} + G \cap G^{\perp})^{\perp\perp}) < \infty$

(d.h. $\dim((F \cap (G \cap G^{\perp})^{\perp}) / (F \cap (F \cap G^{\perp})^{\perp})) < \infty$*),*

(D) $\dim((F \cap G^{\perp}) / (F \cap F^{\perp})) < \infty$ *und*

$\dim((F \cap G^{\perp}) / \mathrm{rad}(F \cap G^{\perp})) = \dim((\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp}) / \mathrm{rad}(\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp}))$,

(E) $\dim((F \cap G^{\perp}) / (G^{\perp\perp} \cap G^{\perp})) < \infty$ *und*

$\dim((F \cap G^{\perp}) / \mathrm{rad}(F \cap G^{\perp})) = \dim((\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp}) / \mathrm{rad}(\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp}))$,

(F) $F^{\perp} + G^{\perp\perp}$ *ist abgeschlossen*

und entsprechende Bedingungen $(\overline{A}),\dots,(\overline{F})$. Dann repräsentieren die Diagramme V_{247} (Fall (A), auf Seite 50), V_{239} (Fall (B), auf Seite 51), V_{228} (Fall (C), auf Seite 52), V_{58} (Fall (D), auf Seite 53), V_{110} (Fall (E), auf Seite 54), und V_{121} (Fall (F), auf Seite 55) Teilverbände von $V_s(F, G)$ (wir sprechen in jedem Fall vom "assoziierten Verband").

Hat in einem der Fälle der assoziierte Verband V dieselben (entsprechenden) Indices wie der zum Paar $(\overline{F}, \overline{G})$ gehörige entsprechende Verband $\overline{V}$, dann existiert in diesem Fall sogar ein zulässiger Orthoisomorphismus $\tau : V \to \overline{V}$. Insbesondere bilden also in jedem der sechs Fälle (A), (B), (C), (D), (E), und (F) die (endlich vielen) Indices des zugehörigen assoziierten Verbandes ein vollständiges System orthogonaler Invarianten des Paares F, G in E modulo der orthogonalen Gruppe von E.

Beweis. Wir gebrauchen die folgenden Bezeichnungen

$$P = G^{\perp\perp} \cap G^{\perp} ,$$
$$Q = G^{\perp\perp} \cap F^{\perp} ,$$
$$R = F \cap F^{\perp} ,$$
$$S = G \cap G^{\perp} ,$$
$$T = G \cap F^{\perp} ,$$
$$U = P \cap (F^{\perp} + S)^{\perp\perp} ,$$

$$V = F \cap G^{\perp} ,$$
$$X = (F \cap G^{\perp})^{\perp} = V^{\perp} ,$$
$$Y = V \cap (F^{\perp} + P)^{\perp\perp} ,$$
$$Z = P \cap (R + S)^{\perp\perp} .$$

Fall (A). Sei die Voraussetzung (A) erfüllt, es gelte also

$$\dim((G^{\perp} \cap R^{\perp}) / (G^{\perp} \cap X)) < \infty .$$

Um die rekursive Konstruktion für den assoziierten Verband V_{247} (s. Diagramm 3 (A), auf Seite 50) durchzuführen, schreiben wir

$$(F + X) \cap G^{\perp} = (F \cap G^{\perp} + X \cap G^{\perp}) \oplus A_1 ,$$
$$G^{\perp} \cap Y^{\perp} = (F + X) \cap G^{\perp} \oplus A_2 ,$$
$$F \cap (G^{\perp} + X) = (F \cap G^{\perp} + F \cap X) \oplus A_3 ,$$
$$G^{\perp} \cap R^{\perp} = G^{\perp} \cap Y^{\perp} \oplus A_4 ,$$
$$(F + G^{\perp}) \cap X = (F \cap X + G^{\perp} \cap X) \oplus A_5 .$$

Wegen der Bedingung

$$V^{\perp} \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{4} A_i \right) = (0)$$

können wir nach Lemma 3.1 solche Supplemente $\overline{A}_i$ für die entsprechenden Räumen in $\overline{V}$ finden, dass eine Isometrie

$$\psi_0 : \bigoplus_{i=1}^{4} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i$$

existiert. Wegen der Bedingung

$$(F \cap X + G^{\perp} \cap X)^{\perp} \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{5} A_i \right) = (0)$$

können wir ferner das Supplement $\overline{A}_5$ so definieren, dass ψ_0 sich zu einer Isometrie

$$\psi_1 : \bigoplus_{i=1}^{5} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i$$

erweitern lässt (die Basisvektoren eines Supplements A_5^* werden mit Vektoren von $F \cap X + G^{\perp} \cap X$ korrigiert wie beim Beweis des Lemmas 3.1). Wir wählen für die rekursive Konstruktion

$$K_1 \;:=\; \left(\bigoplus_{i=1}^{5} A_i \,,\, \psi_1 \,,\, \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i \right)$$

zum ersten Kandidaten. Die irreduziblen Elemente von V_{247} werden in der Tabelle 1 (A) auf Seite 56 betrachtet. Die Elemente 17 , 38 , 40 und 41 werden wie folgt diskutiert: $17^{\perp} = X + X^{\perp}$, weil $X^{\perp}$ endliche Codimension in $X + X^{\perp}$ hat; $40^{\perp} = X^{\perp} + F \cap X$, weil $F \cap X$ endliche Codimension in $X^{\perp} + F \cap X$ hat; analogerweise gilt $41^{\perp} = X^{\perp} + G^{\perp} \cap X$, und schliesslich $38^{\perp} = R \dotplus U$, das als $V \cap (F^{\perp} + S)^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist.

Die nicht orthostabilen irreduziblen Elemente $42 - 46$ sind nach der Wahl von K_1 quasistabil (q), und die Elemente 42 , 45 und 46 sind quasiprim und quasistabil (qq). Die Konstruktion im Fall (A) lässt sich also nach Satz 2.4 durchführen.

Fall (B). Sei die Bedingung (B) erfüllt, es gelte also

$$\dim((F \cap P^{\perp})/(F \cap X)) \;<\; \infty \quad \text{und} \quad (F^{\perp} + S)^{\perp\perp} \;\subseteq\; F^{\perp} + P \;.$$

Das Berechnen des geforderten Verbandes geht ähnlich wie im Fall (A); jetzt brauchen wir das Element $(F \cap P^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp} + P)^{\perp\perp}$ nicht mitzunehmen, aber die Stabilität von $G^{\perp} \cap R^{\perp}$ muss untersucht werden. Der Verband V_{239} (s. Diagramm 3 (B), auf Seite 51) ist hinreichend für die Konstruktion in Fall (B).

Wir führen jetzt die folgenden Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned}
M &= V \cap (G + R)^{\perp\perp} \,, \\
(F + X) \cap G^{\perp} &= (F \cap G^{\perp} + X \cap G^{\perp}) \oplus A_1 \,, \\
F \cap (G^{\perp} + X) &= (F \cap G^{\perp} + F \cap X) \oplus A_2 \,, \\
F \cap M^{\perp} &= F \cap (G^{\perp} + X) \oplus A_3 \,, \\
F \cap P^{\perp} &= F \cap M^{\perp} \oplus A_4 \,, \\
(F + G^{\perp}) \cap X &= (F \cap X + G^{\perp} \cap X) + A_5 \,.
\end{aligned}$$

Wie im Fall (A) schliessen wir, dass es für die entsprechenden Räume in $\overline{V}$ solche Supplemente $\overline{A}_i$ gibt, dass eine Isometrie

$$\psi : \;\bigoplus_{i=1}^{5} A_i \;\to\; \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i$$

sich definieren lässt. Wir wählen wieder

$$K_1 \;:=\; \left(\bigoplus_{i=1}^{5} A_i \,,\, \psi \,,\, \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i \right) .$$

Die Tabelle 1 (B) auf Seite 56 dient als Diskussion der irreduziblen Elemente von $\mathcal{V}_{239}$ und besagt, dass die Konstruktion im Fall (B) möglich ist.

Fall (C). Die Bedingung (C) bedeutet die Ungleichung

$$\dim((F \cap S^{\perp}) / (F \cap X)) < \infty .$$

Wir betrachten den Verband $\mathcal{V}_{228}$ in Diagramm 3 (C), auf Seite 52. Wir definieren die Supplemente $A_1, \dots, A_5$ genau wie in Fall (B) und schreiben noch

$$F \cap S^{\perp} = F \cap P^{\perp} \oplus A_6 .$$

Es gibt wieder eine analoge Zerlegung für $\overline{F} \cap \overline{S}^{\perp}$ und eine Isometrie

$$\psi : \bigoplus_{i=1}^{6} \to \bigoplus_{i=1}^{6} \overline{A}_i$$

(vgl. Fall (B)), sodass

$$K_1 := \left(\bigoplus_{i=1}^{6} A_i , \psi , \bigoplus_{i=1}^{6} \overline{A}_i \right)$$

als erster Kandidat geeignet ist. Die irreduziblen Elemente des Verbandes $\mathcal{V}_{228}$ finden sich in Tabelle 1 (C) auf Seite 56.

Fall (D). Mit der Bedingung (D) gelten

$$\dim(V / R) < \infty \qquad \text{und} \qquad \dim(V / \operatorname{rad} V) = \dim(\overline{V} / \operatorname{rad} \overline{V}) .$$

Hiermit sind die Elemente $F^{\perp} + P$, $F^{\perp} + S$, $P + R$, $R + S$ und $Q + S$ abgeschlossen.

Für die Abbildungsaufgabe des assoziierten Verbandes $\mathcal{V}_{58}$ in Diagramm 3 (D), auf Seite 53, schreiben wir jetzt

$$S = T \oplus A_1 ,$$

$$P = (Q + S) \oplus A_2 ,$$

$$V \cap (G + R)^{\perp\perp} = (P + R) \oplus A_3 ,$$

$$V = V \cap (G + R)^{\perp\perp} \oplus A_4 ,$$

und ebenso mit Balken. Wegen

$$V^{\perp} = (F^{\perp} + G)^{\perp\perp} \supseteq (G + R)^{\perp\perp}$$

liegt $V \cap (G+R)^{\perp\perp}$ in rad V. Es gibt also eine Isometrie ϕ: rad $V \to$ rad $\overline{V}$, die $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ auf $\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \overline{A}_3$ abbildet (man bemerke, dass der Raum rad V nicht notwendigerweise ein Element von $\mathcal{V}_{228}$ sein muss). Ferner lässt sich diese Abbildung zu einer Isometrie

$$\psi: \bigoplus_{i=1}^{4} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i$$

erweitern, wodurch der erste Kandidat K_1 definiert wird. Die Betrachtung der irreduziblen Elemente in Tabelle 1 (D) auf Seite 56 zeigt, dass die Konstruktion in Fall (D) möglich ist.

Fall (E). Mit der Bedingung (E) gelten

$$\dim V/P < \infty \quad \text{und} \quad \dim V/\operatorname{rad} V = \dim \overline{V}/\operatorname{rad} \overline{V} ,$$

also sind die Elemente $G^{\perp\perp}+R$ und $P+R$ abgeschlossen.

Wir führen die Konstruktion für den Verband $\mathcal{V}_{110}$ (s. Diagramm 3 (E), auf Seite 54) durch. Seien

$$\begin{aligned} R &= Q \oplus A_1 , \\ N &= (R+U) \oplus A_2 , \\ Y &= (P+N) \oplus A_3 , \\ V &= Y \oplus A_4 \end{aligned}$$

und genauso mit den Balken. Weil Y in $V \cap V^{\perp}$ liegt, impliziert eine analoge Betrachtung wie im Fall (D) die Existenz einer Isometrie

$$\psi: \bigoplus_{i=1}^{4} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i .$$

Die Tabelle 1 (E) auf Seite 56 besagt, dass wir

$$K_1 := \left(\bigoplus_{i=1}^{4} A_i , \psi , \bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i \right)$$

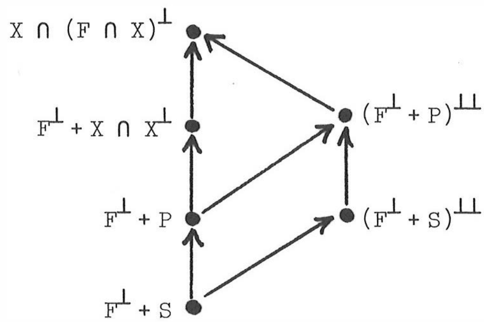
zum ersten Kandidaten wählen können.

Fall (F). Sei $F^{\perp}+G^{\perp\perp}$ abgeschlossen, also gelte $V^{\perp} = F^{\perp}+G^{\perp\perp}$. Hiermit sind auch $G^{\perp\perp}+R$, $F^{\perp}+P$ und $P+R$ abgeschlossen.

Der orthostabile Verband $\mathcal{V}_s(F,G)$ ist distributiv und sieht aus wie Diagramm 3 (F) auf Seite 55. Die Behauptung folgt sofort aus Satz 2.4.

Der Satz 3.3 ist damit bewiesen.

<u>Bemerkung.</u> Führt man die verbandstheoretischen Rechnungen, die zu $\mathcal{V}_{247}$ und $\mathcal{V}_{239}$ führen durch, so kommt man zur Vermutung, dass die Bedingung $(F^{\perp} + S)^{\perp\perp} \subseteq F^{\perp} + P$ in diesen Fällen "nur" als beweistechnische Hilfe dient. Um den Satz ohne diese Bedingungen zu beweisen, hätte man jedoch den von den Ketten



erzeugten Teilverband in jenen Fällen zu berechnen und "einzubauen". Der ganze Verband, und somit auch die Betrachtungen der entstehenden irreduziblen Elemente, würden aber kompliziert werden.

Unten werden (R1) und (R2) die folgenden Bedingungen (für gegebene Paare (F, G), $(\overline{F}, \overline{G})$) bedeuten:

(R1) $$\dim((F \cap G^{\perp}) / \operatorname{rad}(F \cap G^{\perp})) = \dim((\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp}) / \operatorname{rad}(\overline{F} \cap \overline{G}^{\perp})) ,$$

(R2) $$\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / \operatorname{rad}(F^{\perp\perp} \cap G^{\perp})) = \dim((\overline{F}^{\perp\perp} \cap \overline{G}^{\perp}) / \operatorname{rad}(\overline{F}^{\perp\perp} \cap \overline{G}^{\perp})) .$$

S a t z 3.4. *Es gelten*

$$G = G^{\perp\perp} \subseteq F \subseteq E , \qquad \overline{G} = \overline{G}^{\perp\perp} \subseteq \overline{F} \subseteq E ;$$

ferner sei wenigstens eine der folgenden Voraussetzungen (sowie die entsprechende Voraussetzung über $\overline{\mathcal{V}}$ *) erfüllt:*

(A) $$\dim((F \cap G^{\perp}) / (F \cap F^{\perp} + G \cap G^{\perp})) < \infty ,$$

$$(G + F^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq (G + G^{\perp}) \cap (F + F^{\perp}) ,$$

$G + G^{\perp}$ *ist abgeschlossen und (R1) gilt,* *(B)* $\dim((F \cap G^{\perp}) / (F \cap F^{\perp})) < \infty$,

$(G + F^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq (G + G^{\perp}) \cap (F + F^{\perp})$, *und (R1) gilt,*

(C) $\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / (F^{\perp\perp} \cap G^{\perp} \cap (F^{\perp} + G)) < \infty$,

$(G + F^{\perp\perp} \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq F + F^{\perp}$, $F \cap G^{\perp}$ *ist totalisotrop,*

$G + G^{\perp}$ *ist abgeschlossen und (R1), (R2) gelten,*

(D) $\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / (F^{\perp\perp} \cap F^{\perp})) < \infty$,

$(G + F^{\perp\perp} \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq (F + F^{\perp}) \cap (G + G^{\perp})$,

$F \cap G^{\perp}$ *ist totalisotrop und (R1), (R2) gelten,*

(E) $\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / (F \cap F^{\perp})) < \infty$,

$(G + F \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \subseteq (F + F^{\perp}) \cap (G + G^{\perp})$,

$F \cap G^{\perp}$ *ist totalisotrop und (R1), (R2) gelten,*

(F) $\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / (G \cap F^{\perp})) < \infty$,

$F \cap G^{\perp}$ *ist totalisotrop und (R1), (R2) gelten,*

(G) $\dim((F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}) / (G \cap G^{\perp})) < \infty$, $F \cap G^{\perp}$ *ist totalisotrop,*

$G + G^{\perp}$ *ist agbeschlossen und (R1), (R2) gelten.*

Dann repräsentieren die Verbände V_{119} *(Fälle (A), (B), Diagramm 4 (A), (B) auf Seite 58),* V_{107} *(Fälle (C), (D), Diagramm 4 (C), (D) auf Seite 59),* V_{88} *(Fall (E), Diagramm 4 (E) auf Seite 60),* V_{36} *(Fälle (F), (G), Diagramm 4 (F), (G) auf Seite 61) die assoziierten Teilverbände von* $V_s(F, G)$.

Hat in jedem der Fälle der entsprechende Verband $\overline{V}$ *die gleichen Indices, so gibt es auch einen zulässigen Orthoisomorphismus* $\tau : V \to \overline{V}$.

Beweis. Wir werden die folgenden Bezeichnungen gebrauchen:

$$R_1 = F \cap F^{\perp} ,$$

$$R_2 = F^{\perp\perp} \cap F^{\perp} ,$$

$$S = G \cap G^{\perp} ,$$

$$T = G \cap F^{\perp} ,$$

$$U = F \cap G^{\perp} ,$$

$$V = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp} ,$$

$$X = (G + R_2)^{\perp\perp} ,$$

$$Z = (G + R_1)^{\perp\perp} .$$

Fall (A). Wir definieren beim assoziierten Verband $\mathcal{V}_{119}$ (s. Diagramm 4 (A), (B), auf Seite 58) die Supplemente A_i wie folgt:

$$U \cap Z = (R_1 + S) \oplus A_1 ,$$

$$U \cap (F^{\perp} + Z) = U \cap Z \oplus A_2 ,$$

$$U \cap X = U \cap (F^{\perp} + Z) \oplus A_3 ,$$

$$U \cap V^{\perp} = U \cap X \oplus A_4 ,$$

$$U = U \cap V^{\perp} \oplus A_5 ,$$

$$F^{\perp} \cap (U + Z) = F^{\perp} \cap Z \oplus A_6 ,$$

$$(F^{\perp} + U) \cap Z = (F^{\perp} \cap Z + U \cap Z) \oplus A_7$$

und entsprechend mit den Balken. Nach der Voraussetzung

$$\dim(U / (R_1 + S)) < \infty ,$$

und wegen der Modularität des Verbandes gilt $\dim(A_j) < \infty$ für $j = 1 , \ldots , 7$.

Es seien

$$A_j = k(a_{ji})_{i=1}^{r} \qquad \text{und} \qquad \overline{A}_j = k(a_{ji}')_{i=1}^{r}$$

für $j = 2 , 6$ und 7 . Wir können annehmen, dass die Basisvektoren so gewählt sind, dass

$$a_{7i} = a_{2i} + a_{6i} , \qquad a_{7i}' = a_{2i}' + a_{6i}'$$

für alle $i = 1 , \ldots , r$ gelten. Wegen der Inklusion

$$\bigoplus_{j=1}^{4} A_j \subseteq V \cap V^{\perp}$$

können wir eine Isometrie

$$\psi_0 : \bigoplus_{j=1}^{4} A_j \to \bigoplus_{j=1}^{4} \overline{A}_j$$

definieren indem wir die Basisvektoren von A_j auf die entsprechenden von $\overline{A}_j$ abbilden. Besonders wird also a_{2i} auf a_{2i}' für $i = 1, \ldots, r$ abgebildet. Da $U \cap V^{\perp}$ in $U \cap U^{\perp}$ liegt, existiert nach Lemma 3.2 eine Isometrie $\psi_1 : A_5 \to \overline{A}_5$. (Man bemerke, dass es nicht notwendig ist, das Element $U \cap U^{\perp}$ im Verband mitzunehmen.) Die Abbildungen ψ_0 und ψ_1 definieren eine Isometrie

$$\psi_2 : A_5 \overset{\perp}{\oplus} \left(\bigoplus_{j=1}^{4} A_i \right) \to \overline{A}_5 \overset{\perp}{\oplus} \left(\bigoplus_{j=1}^{4} \overline{A}_i \right).$$

Der Raum A_6 liegt in R_2 und steht senkrecht auf $\oplus_{j=1}^{5} A_j$, sodass ψ_2 zu einer Isometrie

$$\psi_3 : \bigoplus_{j=1}^{6} A_j \to \bigoplus_{j=1}^{6} \overline{A}_j$$

erweitert wird, wenn wir a_{6i} auf a_{6i}' für $i = 1, \ldots, r$ abbilden. Von dieser Isometrie wird auch A_7 auf $\overline{A}_7$ abgebildet. Wir wählen für die rekursive Konstruktion

$$K_1 := \left(\bigoplus_{j=1}^{6} A_j , \psi_3 , \bigoplus_{j=1}^{6} \overline{A}_j \right)$$

als ersten Kandidaten. Die Betrachtung der irreduziblen Elemente von V_{119} in Tabelle 2 (A) zeigt, dass wir den Satz 2.4 zitieren können und mit der rekursiven Konstruktion Erfolg haben.

Fall (B). Wir werden wieder die Konstruktion für den Verband V_{119} (also Diagramm 4 (A), (B), Seite 58) durchführen. Dafür seien die Räume A_j, $j = 1, \ldots, 7$ und die Isometrie ψ_3 wie in Fall (A) definiert.

Schreiben wir noch

$$S = T \oplus A_8 \quad \text{und} \quad \overline{S} = \overline{T} \oplus \overline{A}_8 ,$$

so können wir die im Fall (A) definierte Abbildung ψ_3 zu einer Isometrie

$$\psi_4 : \overset{\perp}{\bigoplus_{j=1}^{8}} A_j \to \overset{\perp}{\bigoplus_{j=1}^{8}} \overline{A}_j$$

erweitern, indem wir die Basisvektoren von A_8 auf die entsprechenden von $\overline{A}_8$ abbilden. Die Tabelle 2 (A) gilt für die Betrachtungen der irreduziblen Elemente von V_{119}, mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt S quasistabil ist.

Fall (C). Sei die Bedingung

$$\dim(V / (R_2 + S)) < \infty$$

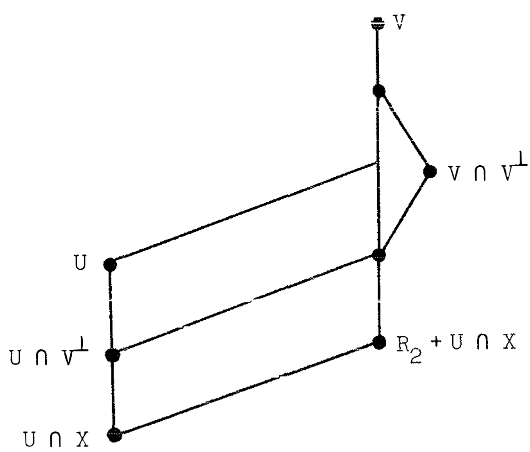
erfüllt.

Wir betrachten den Verband $\mathcal{V}_{107}$ in Diagramm 4 (C), auf Seite 59 und schreiben jetzt

$$U \cap Z = (R_1 + S) \oplus A_1 ,$$
$$U \cap (F^{\perp} + Z) = U \cap Z \oplus A_2 ,$$
$$U \cap X = U \cap (F^{\perp} + Z) \oplus A_3 ,$$
$$U = U \cap X \oplus A_4 ,$$
$$F^{\perp} \cap (U + Z) = F^{\perp} \cap Z \oplus A_5 ,$$
$$(F^{\perp} + U) \cap Z = (F^{\perp} \cap Z + U \cap Z) \oplus A_6 ,$$
$$V = (R_2 + U) \oplus A_7$$

und entsprechend mit den Balken.

Zuerst machen wir eine Betrachtung zum folgenden Teilverband von $\mathcal{V}_s(F, G)$:



Wir schreiben

$$U \cap V^{\perp} = U \cap X \oplus K_1 ,$$
$$U = U \cap V^{\perp} \oplus K_2 ,$$
$$V \cap V^{\perp} = (R_2 + U \cap V^{\perp}) \oplus K_3 ,$$
$$V = (U + V \cap V^{\perp}) \oplus A_4$$

und entsprechend mit den Balken. Nach den Dimensionsbedingungen existiert eine Isometrie

$$\phi_0 : \; K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \;\to\; \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \overline{K}_3 \, ,$$

und weil das Komplement von $V \cap V^{\perp}$ in V nicht ausgeartet ist, kann $\phi_0 \mid K_2$ zu einer Isometrie $K_2 \oplus K_4 \to \overline{K}_2 \oplus \overline{K}_4$ erweitert werden. Der Raum A_7 steht senkrecht auf $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, und wegen

$$\begin{aligned} \Phi(A_7\,,A_4) &= \Phi(K_3 \oplus K_4\,,K_1 \oplus K_2) = \Phi(K_4\,,K_2) \\ &= \Phi(\overline{K}_4\,,\overline{K}_2) = \ldots = \Phi(\overline{A}_7\,,\overline{A}_4) \end{aligned}$$

können wir annehmen, dass eine Isometrie

$$\psi_0 : \left(\bigoplus_{i=1}^{4} A_i \right) \oplus A_7 \;\to\; \left(\bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i \right) \oplus \overline{A}_7$$

existiert. Ferner lässt sich ψ_0 zu einer Isometrie

$$\psi_1 : \left(\left(\bigoplus_{i=1}^{4} A_i \right) \oplus A_7 \right) \overset{\perp}{\oplus} (A_5 \overset{\perp}{\oplus} A_6) \;\to\; \left(\left(\bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i \right) \oplus \overline{A}_7 \right) \overset{\perp}{\oplus} (\overline{A}_5 \overset{\perp}{\oplus} \overline{A}_6)$$

erweitern, so dass

$$\mathcal{K}_1 \; := \; \left(\bigoplus_{i=1}^{7} A_i \, , \, \psi_1 \, , \, \bigoplus_{i=1}^{7} \overline{A}_i \right)$$

als erster Kandidat geeignet ist. Aus der Tabelle 2 (C) auf Seite 62 sieht man, dass die irreduziblen Elemente von $\mathcal{V}_{107}$ die Voraussetzungen II-III des Satzes 2.2 erfüllen.

Fall (D). Wir wiederholen die Betrachtungen vom Fall (C) und schreiben noch

$$S = T \oplus A_8 \, , \qquad \overline{S} = \overline{T} \oplus \overline{A}_8$$

und erweitern die Abbildung ψ_1 zu einer Isometrie

$$\psi_2 : \; \bigoplus_{i=1}^{8} A_i \;\to\; \bigoplus_{i=1}^{8} \overline{A}_i \; .$$

Hier ist S quasistabil.

Fall (E). Die Behauptung folgt aus dem Beweis des Falles (D); offensichtlich kann man alle von den irreduziblen Elementen $R_2^{\perp}$ und $U \cap (G + R_2)^{\perp\perp} = U \cap X$ erzeugten 19 Elemente aus $\mathcal{V}_{107}$ weglassen und die im Fall (D) definierte Abbildung ψ_1 auf $R_2 / (F^{\perp} \cap (U + Z))$ erweitern, wodurch R_2 quasistabil wird.

Der assoziierte Verband wird wie Diagramm 4 (E), auf Seite 60 aussehen und die in Tabelle 2 (E) (auf Seite 62) beschriebenen irreduziblen Elemente erhalten, also auch die Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllen.

Fall (F). Man kann sogar eine Isometrie $V/T \to \overline{V}/\overline{T}$ definieren. Hiermit ist der Verband $\mathcal{V}_{36}^{+,\cap}(F, F^{\perp\perp}, F^{\perp}, G, G^{\perp}) \cup \{T^{\perp}\}$ (s. Diagramm 4 (F),(G), auf Seite 61) mit seinen irreduziblen Elementen in Tabelle 2 (F) für die Abbildungsaufgabe hinreichend.

Bemerkung. Der von den Ketten $\{X_1 \dots X_{n-1}\}$ und $\{Y_1 \dots Y_{m-1}\}$ erzeugte Verband $\mathcal{V}_{+,\cap}(X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{m-1})$ ist distributiv und enthält $(n+m)!\,(n!\,m!)^{-1}$ Elemente (s. [2], Kap. III, S. 66).

Fall (G). Es genügt wieder, den Verband $\mathcal{V}_{36}$ des Falls (F) zu betrachten.

Wir können jetzt nicht eine Isometrie $S/T \to \overline{S}/\overline{T}$ wie im Fall (F) definieren. Das Element S ist aber orthostabil, und die Konstruktion kann hiermit als ein Spezialfall der Betrachtung von (F) angesehen werden.

Der Satz ist damit bewiesen.

3.3. Über orthogonale oder totalisotrope Paare (F , G)

Wir untersuchen als nächstes die Lösung der Abbildungsaufgabe wenn F und G totalisotrop sind oder senkrecht aufeinander stehen. Wir werden einige Resultate beweisen, aus denen z.B. die Sätze über orthogonale Trennung oder über Trennung eines totalisotropen Paares als Korollar geschlossen werden können.

Wir definieren zuerst die folgenden Bedingungen:

(1) $$(F + G \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + (G \cap F^{\perp})^{\perp\perp}\,,$$
$$(G + F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} + (F \cap G^{\perp})^{\perp\perp}\,,$$

(1') $$(F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp}\,, \qquad (G \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} \cap F^{\perp}\,,$$

(2) $$((F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}) \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = (F + G)^{\perp\perp} \cap G^{\perp}\,,$$
$$((F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}) \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = (F + G)^{\perp\perp} \cap F^{\perp}\,,$$

(3) $$(F \cap G^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \supset F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}\,,$$

(4) $$\dim((F^{\perp} + G^{\perp}) \cap (F + G)^{\perp\perp}) / (F^{\perp} \cap (F + G)^{\perp\perp} + G^{\perp} \cap (F + G)^{\perp\perp})) < \infty\,,$$

(5) $\dim(((F+G)\cap(F^{\perp\perp}\cap G)^{\perp\perp}\cap(F\cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp})/((F+G)\cap(F\cap G)^{\perp\perp})) < \infty$,

(5') $\dim(((F+G)\cap(F\cap G)^{\perp\perp})/(F\cap(F\cap G)^{\perp\perp}+G\cap(F\cap G)^{\perp\perp})) < \infty$

und $(F\cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp}\cap(G\cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} \supseteq (F+G)\cap F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp}$.

Satz 3.5. *Seien* F , G *und* $\overline{F}$, $\overline{G}$ *zwei totalisotrope Paare von* E *(d.h.* $F\subseteq F^{\perp}$, $G\subseteq G^{\perp}$, $\overline{F}\subseteq\overline{F}^{\perp}$, $\overline{G}\subseteq\overline{G}^{\perp}$ *) mit den Bedingungen (2), (3) und (4). Sei ferner mindestens eine der folgenden Voraussetzungen und die entsprechenden Voraussetzungen über* $\overline{V}$ *erfüllt:*

(A) (1) und (5) gelten,

(B) (1) und (5') gelten,

(C) (1') und (5) gelten,

(D) (1') und (5') gelten.

Die assoziierten Teilverbände von $V_s(F,G)$ *in jedem der Fälle finden sich wie folgt:*

Fall (A): V_{377} *, Diagramm 5 (A), auf Seiten 63-64,*

Fall (B): V_{342} *, Diagramm 5 (B), auf Seite 65,*

Fall (C): V_{307} *, Diagramm 5 (C), auf Seite 66,*

Fall (D): V_{272} *, Diagramm 5 (D), auf Seite 67.*

Dann ist in jedem der Fälle ein indextreuer Orthoisomorphismus $\tau: V\to\overline{V}$ *zwischen den entsprechenden Verbänden immer zulässig; insbesondere gibt es also eine Isometrie* $T: E\to E$ *mit* $TF=\overline{F}$ *und* $TG=\overline{G}$ *.*

Beweis. Wir werden die folgenden Bezeichnungen gebrauchen:

$$D = F\cap G\ ,$$
$$H = F\cap G^{\perp}\ ,$$
$$K = F^{\perp}\cap G\ ,$$
$$L = F\cap G^{\perp\perp}\ ,$$
$$M = F^{\perp\perp}\cap G\ ,$$
$$N = F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp}\ ,$$
$$P = F^{\perp\perp}\cap G^{\perp}\ ,$$
$$Q = F^{\perp}\cap G^{\perp\perp}\ ,$$
$$R = F^{\perp}\cap G^{\perp}\ .$$

Die Bedingungen lassen sich also wie folgt schreiben:

(1) $$(F+K)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + K^{\perp\perp} \quad \text{und} \quad (G+H)^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} + H^{\perp\perp} ,$$

(1') $$H^{\perp\perp} = P , \quad K^{\perp\perp} = Q ,$$

(2) $$(G+P)^{\perp\perp} = G^{\perp} \cap R^{\perp} \quad \text{und} \quad (F+Q)^{\perp\perp} = F^{\perp} \cap R^{\perp} ,$$

(3) $$H^{\perp\perp} \cap K^{\perp\perp} \supseteq N ,$$

(4) $$\dim(((F^{\perp} + G^{\perp}) \cap R^{\perp}) / (F^{\perp} \cap R^{\perp} + G^{\perp} \cap R^{\perp})) < \infty ,$$

(5) $$\dim((F \cap M^{\perp\perp}) / (F \cap D^{\perp\perp})) < \infty \quad \text{und}$$
$$\dim((G \cap L^{\perp\perp}) / (G \cap D^{\perp\perp})) < \infty ,$$

(5') $$\dim((F+G) \cap D^{\perp\perp}) / (F \cap D^{\perp\perp} + G \cap D^{\perp\perp})) < \infty \quad \text{und}$$
$$L^{\perp\perp} \cap M^{\perp\perp} \supseteq L + M .$$

Fall (A). Seien (1)-(5) erfüllt.
Wegen der Beziehungen

$$H^{\perp\perp} + Q = R \cap (H^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}) , \qquad K^{\perp\perp} + P = R \cap (K^{\perp\perp} + F^{\perp\perp})$$

gilt nach (1) die Bedingung

(6) $$(H+Q)^{\perp\perp} = H^{\perp\perp} + Q , \qquad (K+P)^{\perp\perp} = K^{\perp\perp} + P .$$

Ferner folgt aus der Modularität

$$(P + K^{\perp\perp}) \cap (Q + H^{\perp\perp}) = K^{\perp\perp} + P \cap Q + H^{\perp\perp} = H^{\perp\perp} + K^{\perp\perp} ,$$

also gilt nach (6) die Bedingung

(7) $$(H+K)^{\perp\perp} = H^{\perp\perp} + K^{\perp\perp} .$$

Um die Abbildungsaufgabe für den assoziierten Verband V_{377} (s. Diagramm 5 (A), auf Seiten 63-64) durchzuführen, schreiben wir

$$32 = (29 + 30) \oplus A_1 ,$$
$$33 = (29 + 31) \oplus A_2 ,$$
$$40 = (30 + 31) \oplus A_3 ,$$
$$4 = 2 \oplus A_4 ,$$

$$5 = 3 \oplus A_5 \,,$$
$$6 = (2+3) \oplus A_6 \,,$$
$$8 = 4 \oplus A_7 \,,$$
$$9 = 5 \oplus A_8 \,.$$

Wegen $R^{\perp} \cap (A_1 \oplus A_2) = (0)$ können wir Lemma 3.1 zitieren und die entsprechenden Supplemente $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ mit einer Isometrie $\psi_0 \colon A_1 \oplus A_2 \to \overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2$ finden. Ferner gilt

$$(30+31)^{\perp} \cap (A_1 + A_2 + A_3) = R \cap (A_1 + A_2 + A_3) = (0) \,.$$

Wir können wie beim Beweis von Lemma 3.1 verfahren und eine Erweiterung $\psi_1 \colon A_1 + A_2 + A_3 \to \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$ konstruieren indem wir die Basisvektoren irgendeines Supplements von $\overline{30} + \overline{31}$ in $\overline{40}$ mit Vektoren von $\overline{30} + \overline{31}$ korrigieren. Es gibt trivialerweise eine Isometrie

$$\psi_2 \colon \bigoplus_{i=4}^{8} A_i \to \bigoplus_{i=4}^{8} \overline{A}_i$$

und folglich wird von ψ_1 und ψ_2 eine Isometrie

$$T_0 \colon \left(\bigoplus_{i=1}^{3} A_i \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\bigoplus_{i=4}^{8} A_i \right) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{3} \overline{A}_i \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\bigoplus_{i=4}^{8} \overline{A}_i \right)$$

erzeugt. Wir wählen zum ersten Kandidaten

$$K_1 = \left(\bigoplus_{i=1}^{8} A_i \,,\; T_0 \,,\; \bigoplus_{i=1}^{8} \overline{A}_i \right) .$$

Die irreduziblen Elemente 4, 5, 8, 9, 32, 33 und 40 sind quasistabil und die Elemente 4, 5, 6, 32, 33 und 40 sind quasiprim. Die Konstruktion lässt sich durchführen nach dem Hauptsatz.

Fall (B). Den quasistabilen Verband $V_{342}(F, G)$ erhalten wir aus Diagramm 5 (A) (Seite 63), indem wir nur die irreduziblen Elemente 8, 9, 12, 13 und 14 und alle von ihnen erzeugten 35 Elemente aus Diagramm 5 (A) weglassen. Der untere Teil des Verbandes V_{342} findet sich in Diagramm 5 (B), auf Seite 65; der obere Teil von V_{342} ist genau derselbe wie Diagramm 5 (A), oberer Teil, auf Seite 64. Die Isometrie für den ersten Kandidaten wird ohne A_7 und A_8 als eine Abbildung $\oplus^6 A_i \to \oplus^6 \overline{A}_i$ nach dem Fall (A) konstruiert.

Fall (C). Wir können die Konstruktionsaufgabe für den Verband V_{307} in Diagramm 5 (C), auf Seite 66, lösen, indem wir den ersten Kandidaten genau wie im Fall (A) definieren.

Fall (D). Mit der Voraussetzung (D) lässt sich der assoziierte Verband bis 272 Elementen vereinfachen. Die Abbildungsaufgabe für den Verband V_{272} in Diagramm 5 (D), auf Seite 67 ist als Spezialfall der oben betrachteten Fälle lösbar.

Wenn wir in den Bedingungen (1)', (1)-(3) die Rollen von $F^{\perp}$ und $G^{\perp}$ vertauschen, erhalten wir die folgenden Beziehungen

(I) $$(F + G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + (G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} ,$$
$$(G + F \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} + (F \cap F^{\perp})^{\perp\perp} ,$$

(I') $$(F \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap F^{\perp} , \qquad (G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} \cap G^{\perp} ,$$

(II) $$((F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}) \cap G^{\perp})^{\perp\perp} = (F + G)^{\perp\perp} \cap G^{\perp} ,$$
$$((F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}) \cap F^{\perp})^{\perp\perp} = (F + G)^{\perp\perp} \cap F^{\perp} ,$$

(III) $$(F \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G \cap G^{\perp})^{\perp\perp} \supset F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} ,$$

(IV) $$\dim(((F^{\perp} + G^{\perp}) \cap (F + G)^{\perp\perp}) / (F^{\perp} \cap (F + G)^{\perp\perp} + G^{\perp} \cap (F + G)^{\perp\perp})) < \infty ,$$

(V) $$\dim(((F + G) \cap (F^{\perp\perp} \cap G)^{\perp\perp} \cap (F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp}) / ((F + G) \cap (F \cap G)^{\perp\perp})) < \infty ,$$

(V') $$\dim(((F + G) \cap (F \cap G)^{\perp\perp}) / (F \cap (F \cap G)^{\perp\perp} + G \cap (F \cap G)^{\perp\perp})) < \infty ,$$
und $$(F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp} \cap (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} \supseteq F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} \cap (F + G) .$$

Indem wir also auch bei den Verbänden nur die Rollen von $F^{\perp}$ und $G^{\perp}$ vertauschen, erhalten wir mit einem völlig analogen Beweis den

Satz 3.6. *Seien* $F \perp G$ *und* $\overline{F} \perp \overline{G}$; *ferner gelte mindestens eine der folgenden Voraussetzungen:*

(A) (I)-(V) gelten,

(B) (I)-(V') gelten,

(C) (I')-(V) gelten,

(D) (I')-(V') gelten.

Dann repräsentieren die Diagramme 5 (A)-(D) auf Seiten 63-67 (mit den vertauschten Rollen von $F^{\perp}$ *und* $G^{\perp}$*) Teilverbände von* V_S *, deren Indices in jenem der Fälle ein vollständiges System orthogonaler Invarianten des Paares* (F, G) *in* E *(modulo der orthogonalen Gruppe von* E*) charakterisieren. Insbesondere existiert in jenem der Fälle eine Isometrie* $T: E \to E$ *mit* $TF = \overline{F}$, $TG = \overline{G}$.

Ist $F+G$ totalisotrop, so sind die Voraussetzungen (1'), (2)-(4) des Satzes 3.5 (und (I'), (II)-(IV) des Satzes 3.6) erfüllt; ferner sind (5) und (5') (resp. (V) und (V')) erfüllt für abgeschlossene F und G.

Liegt $F^{\perp}+G^{\perp}$ dicht in E, so sind die Voraussetzungen (3), (5) und (5') (resp. (III), (V) und (V')) erfüllt. Im Falle von abgeschlossenem $F+G$ gelten (1), (2) und (4) (resp. (I), (II), (IV)).

Die Trennungssätze für orthogonale oder symplektische Paare (s. Sätze XI.1 und XI.2 in [8]; Sätze II.1' und II.2' in [4]) lassen sich also als Korollar deduzieren. In diesen Fällen erhält man als Spezialfall den Brandschen Verband $V_{100}(F,G)$ in Diagramm 14, auf Seite 85 (vgl. [4], S. 21).

S a t z 3.7. *Es gelten*

$$F = F^{\perp\perp} \subseteq F^{\perp}, \qquad \bar{F} = \bar{F}^{\perp\perp} \subseteq \bar{F}^{\perp},$$
$$G = G^{\perp\perp} \subseteq G^{\perp}, \qquad \bar{G} = \bar{G}^{\perp\perp} \subseteq \bar{G}^{\perp}.$$

Ferner sei (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(A) $\dim(((F^{\perp}+G^{\perp}) \cap (F+G)^{\perp\perp}) / (F^{\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp} + G^{\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp})) < \infty$, *und die Räume* $(F+G)^{\perp\perp} + G^{\perp} \cap (F \cap G^{\perp})^{\perp}$, $(F+G)^{\perp\perp} + F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $(F+G)^{\perp\perp} + F^{\perp} \cap (G \cap F^{\perp})^{\perp}$ *sind abgeschlossen,*

(B) $\dim((F+F^{\perp} \cap G^{\perp})^{\perp\perp} / (F+F^{\perp} \cap G)^{\perp\perp}) < \infty$ *oder* $\dim((G+F^{\perp} \cap G^{\perp})^{\perp\perp} / (G+F \cap G^{\perp})^{\perp\perp}) < \infty$

und entsprechend mit Balken. Dann repräsentieren V_{155} *(Fall (A), auf Seite 70) und* V_{143} *(Fall (B), auf Seite 71) die assoziierten Teilverbände von* $V_S(F,G)$, *deren Indices die Bahn des Paares* (F,G) *charakterisieren.*

Beweis. Wir wenden die Bezeichnungen des Satzes 3.5 an.

Sei zuerst die Bedingung (A) erfüllt, es gelten also die Beziehungen

$$\dim(((F^{\perp}+G^{\perp}) \cap R^{\perp}) / (F^{\perp} \cap R^{\perp} + G^{\perp} \cap R^{\perp})) < \infty,$$
$$R^{\perp} + G^{\perp} \cap H^{\perp}, \quad R^{\perp} + F^{\perp} \cap K^{\perp} \quad \text{und} \quad R + R^{\perp} \quad \text{sind abgeschlossen.}$$

Wir betrachten den Verband V_{155} in Diagramm 6 (A) auf Seite 70 dessen irreduzible Elemente sich in Tabelle 4 (A), auf Seite 72 finden.

Der Raum $R + F^{\perp} \cap R^{\perp} = F^{\perp} \cap (R + R^{\perp})$ ist abgeschlossen, also gilt $R + (F + K)^{\perp\perp} \subseteq (F + R)^{\perp\perp} \subseteq R + F^{\perp} \cap R^{\perp}$, und folglich gilt $(F + R)^{\perp\perp} = R + R^{\perp} \cap (F + R)^{\perp\perp}$. Analogerweise wird die Lage von $(G + R)^{\perp\perp}$ diskutiert. Wir schreiben

$$18 = (13 + 16) \oplus A_1 ,$$

$$19 = (13 + 17) \oplus A_2 ,$$

$$24 = (16 + 17) \oplus A_3 ,$$

Wir schliessen wie beim Beweis des Satzes 3.5, dass eine Isometrie

$$\psi_1 : \; A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \to \overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \overline{A}_3$$

mit geeigneten Supplementen existiert, und folglich $(A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 , \psi_1 , \overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \overline{A}_3)$ als erster Kandidat geeignet ist. Die Elemente 18 , 19 und 24 werden quasiprim und quasistabil, also lässt sich die Konstruktion durchführen.

Fall (B). Sei z.B. die erste Bedingung von (B) erfüllt, also gilt nach den früheren Bezeichnungen

$$\dim((F^{\perp} \cap K^{\perp}) / (F^{\perp} \cap R^{\perp})) < \infty .$$

Wir führen die rekursive Konstruktion für den Verband V_{137} in Diagramm 6 (B), auf Seite 71, durch. Dafür schreiben wir nach den Bezeichnungen der irreduziblen Elemente in Tabelle 4 (B), auf Seite 72:

$$19 = (13 + 17) \oplus A_1 ,$$

$$18 = (13 + 16) \oplus A_2 ,$$

$$32 = 18 \oplus A_3 ,$$

$$20 = 32 \oplus A_4 ,$$

$$24 = (16 + 17) \oplus A_5 .$$

Wegen

$$25^{\perp} \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{4} A_i \right) = (0)$$

können wir nach Lemma 3.1 derartige Supplemente $\overline{A}_i$ (für die entsprechenden Räumen mit Balken) finden, dass eine Isometrie

$$\psi_0 : \bigoplus_{i=1}^{4} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{4} \overline{A}_i$$

existiert. Ferner können wir wegen

$$(17 + 16)^{\perp} \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{5} A_i \right) = (0)$$

das Supplement $\overline{A}_5$ von $\overline{16} + \overline{17}$ in $\overline{24}$ so wählen, dass ψ_0 sich zu einer Isometrie

$$\psi : \bigoplus_{i=1}^{5} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i$$

erweitern lässt. Mit dem Kandidaten

$$K_1 := \left(\bigoplus_{i=1}^{5} A_i , \psi , \bigoplus_{i=1}^{5} \overline{A}_i \right)$$

wird V_{143} quasistabil.

Analogerweise behandelt man den Fall, wo die zweite Bedingung von (B) erfüllt ist.

3.4. <u>Über Paare</u> (F, G) <u>im Falle von "kleinen"</u> $F^{\perp}$ <u>und</u> $G^{\perp}$

Wir werden die Konstruktionsaufgabe mit kleinen $F^{\perp}$ und $G^{\perp}$ studieren. Als Spezialfall wird ein dichtes Paar (F, G) betrachtet.

S a t z 3.8. *Seien* F, G, $\overline{F}$ *und* $\overline{G}$ *gegebene Teilräume von* E *mit den folgenden vier Eigenschaften (entsprechend mit Balken):*

(1) $F^{\perp} + G^{\perp}$ *ist abgeschlossen und liegt in* F ,

(2) $(F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$,

(3) $\dim((F \cap G) / (G \cap F^{\perp} \cap G^{\perp})) < \infty$,

(4) $\dim((F \cap G) / \mathrm{rad}(F \cap G)) = \dim((\overline{F} \cap \overline{G}) / \mathrm{rad}(\overline{F} \cap \overline{G}))$.

Fallen die Indices der assoziierten Verbände V_{98} *und* $\overline{V}_{98}$ *(s. Diagramm 7, auf Seite 73) zusammen, so existiert ein zulässiger Orthoisomorphismus* $\tau : V_{98} \to \overline{V}_{98}$.

Beweis. Die irreduziblen Elemente von V_{98} finden sich in Tabelle 5 auf Seite 74. Man bemerke, dass

$$19^{\perp} = (F^{\perp\perp} \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp})^{\perp} = (F^{\perp} + G^{\perp\perp} \cap G^{\perp})^{\perp\perp}$$

$$= (G^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp}))^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$$

gilt, weil $F^{\perp} + G^{\perp}$ abgeschlossen ist. Ferner liegt der Raum $(F \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp})^{\perp}$ in $G^{\perp\perp}$, und aus den Inklusionen $17^{\perp} \subseteq G^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp}) = F^{\perp} + G^{\perp\perp} \cap G^{\perp}$ und $17^{\perp} \supseteq 19^{\perp}$ folgt $17^{\perp} = 19^{\perp}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \oplus A_1 , \\ 3 &= 1 \oplus A_2 , \\ 5 &= (2+4) \oplus A_3 , \\ 6 &= (2+3) \oplus A_4 , \\ 7 &= (3+4) \oplus A_5 , \\ 9 &= 6 \oplus A_6 \end{aligned}$$

und analog mit den Balken. Aus der Beziehung $(6+8)^{\perp} \supseteq F^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp}) = F^{\perp} + G^{\perp} \supseteq 6+8$ folgt, dass die Räume $A_1, \ldots, A_5$ totalisotrop sind, und weil 6 in $9 \cap 9^{\perp}$ liegt, folgt aus Lemma 3.2, dass A_6 und $\overline{A}_6$ isometrisch sind. Die Räume $A_1, \ldots, A_6$ stehen senkrecht aufeinander, also existiert eine Isometrie

$$T_1 : \bigoplus_{i=1}^{6} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{6} \overline{A}_i .$$

Wir wählen

$$K_1 = \left(\bigoplus_{i=1}^{6} A_i , T_1 , \bigoplus_{i=1}^{6} \overline{A}_i \right)$$

zum ersten Kandidaten und konstatieren, dass die irreduziblen Elemente 2, 3 und 9 quasistabil, und 5, 6, 7 quasistabil und quasiprim werden. Mit einer Zitierung von Satz 2.4 wird der Beweis beendet.

<u>Bemerkung.</u> Setzen wir noch voraus, dass z.B. $(F \cap G)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$ gilt, so reicht es, die schwächere Bedingung

$$(3') \qquad \dim((G \cap (F^{\perp} + G^{\perp})) / (G \cap F^{\perp} \cap G^{\perp})) < \infty$$

statt (3) zu fordern.

S a t z 3.9. *Seien* F, G, $\overline{F}$ *und* $\overline{G}$ *Teilräume von* E *mit den folgenden Eigenschaften (entsprechend mit Balken):*

(1) $\qquad F^{\perp} \subseteq G$ *und* $G^{\perp} \subseteq F$,

(2) $\qquad F^{\perp} + G^{\perp}$ *ist abgeschlossen,*

(3) $$(F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} ,$$

(4) $$\dim((F \cap G) / (F^{\perp} \cap G^{\perp})) < \infty ,$$

(5) $$\dim((F \cap G) / \operatorname{rad}(F \cap G)) = \dim((\overline{F} \cap \overline{G}) / \operatorname{rad}(\overline{F} \cap \overline{G})) .$$

Dann lässt sich ein zulässiger Orthoisomorphismus $\tau : \mathcal{V}_{133} \to \overline{\mathcal{V}}_{133}$ *zwischen den assoziierten Verbänden (s. Diagramm 8, auf Seite 75) definieren.*

Beweis. Die irreduziblen Elemente dieses distributiven, aber nicht orthostabilen Verbandes finden sich in Tabelle 8, S. 76. Weil $F^{\perp} + G^{\perp}$ abgeschlossen ist, gilt

$$\begin{aligned} 16^{\perp} &= (G^{\perp\perp} \cap (F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp})^{\perp} = (G^{\perp} + F^{\perp\perp} \cap F^{\perp})^{\perp\perp} \\ &= (F^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp}))^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp}) . \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$11^{\perp} = (G \cap (F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp})^{\perp} \subseteq (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} .$$

Wegen der Inklusionen $F^{\perp} \subseteq 11$ und $16^{\perp} \subseteq 11^{\perp}$ fallen $11^{\perp}$ und $F^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$ zusammen. Analogerweise werden $12^{\perp}$ und $17^{\perp}$ diskutiert. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \oplus A_1 , \\ 3 &= 1 \oplus A_2 , \\ 8 &= (2 + 3) \oplus A_3 . \end{aligned}$$

Der Raum $2 + 3$ liegt in $8 \cap 8^{\perp}$ und 2, 3 sind totalisotrop. Wir können Lemma 3.2 zitieren und eine Isometrie

$$T_1 : \bigoplus_{i=1}^{3} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{3} \overline{A}_i$$

für den ersten Kandidaten definieren. Die irreduziblen Elemente von $\mathcal{V}_{133}$ erfüllen jetzt die Voraussetzungen des Hauptsatzes.

Als nächstes betrachten wir den Fall $F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq F \cap G =: D$. Dazu berechnen wir zuerst den Verband $\mathcal{V}_{24}(F , G)$ in Diagramm 9, auf Seite 77. Um die Konstruktionsaufgabe mit den schwächsten Voraussetzungen über F und G zu beweisen, fügen wir die Elemente $S := (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$ und $(F + G)^{\perp\perp}$ hinzu. Dies erzeugt den Verband $\mathcal{V}_{58}$ in Diagramm 10 auf Seite 77. Wir schreiben

$$F \cap (G+S) = (F \cap G + F \cap S) \oplus H ,$$

$$G \cap (F+S) = (F \cap G + G \cap S) \oplus K ,$$

$$(F+G) \cap S = (F \cap S + G \cap S) \oplus L .$$

Um die nicht distributiven Stellen überwinden zu können, haben wir die Bedingung

(1) $\dim(L) < \infty$

vorauszusetzen. Ferner sollen die geeigneten (entsprechenden) isometrischen Supplemente $\overline{H}$ und $\overline{K}$ existieren. Dafür müssen wir die Möglichkeit erhalten, die Basisvektoren von H und K geeignet korrigieren zu können. Es scheint natürlich, dafür die Bedingung

(2) $(D+S)^{\perp} \subseteq D+S$

zu fordern. Weil $D^{\perp\perp}$ in $S^{\perp}$ und $F^{\perp}+G^{\perp}$ in D liegt, folgt aus (2) die Bedingung

(3) $S \subseteq D^{\perp} \subseteq S+D$.

Wir nehmen also an, dass (1) und (3) erfüllt sind.

Zuerst beschränken wir uns auf zwei Spezialfälle, für welche es hinreichend ist, den Verband V_{58} in Diagramm 10, auf Seite 77 zu betrachten.

Fall (A). Sei $D^{\perp} = S$. Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$D^{\perp\perp} = (F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} .$$

Ferner folgt aus der Beziehung $F^{\perp}+G^{\perp} \subseteq F \cap S \subseteq S$, dass $(F \cap S)^{\perp}$ mit $S^{\perp}$ zusammenfällt. Analog verifiziert man die Gleichung

$$(D \cap S)^{\perp} = (G \cap S)^{\perp} = S^{\perp} .$$

Alle irreduziblen Elemente von V_{58} , die prim sind, sind auch stabil. Die nicht primen irreduziblen Elemente $(F+G) \cap S$, $F \cap (G+S)$ und $G \cap (F+S)$ werden quasiprim und quasistabil, wenn wir eine Isometrie

$H \oplus K \oplus L \to \overline{H} \oplus \overline{K} \oplus \overline{L}$ für den ersten Kandidaten definieren können. Dies ist jetzt möglich nach Lemma 3.1, weil $D^{\perp} \cap (H+K) = (0)$ für beliebige Supplemente H und K gilt und L totalisotrop ist. Wir halten also den folgenden Satz fest:

S a t z 3.10. *Seien* F, G, $\overline{F}$ *und* $\overline{G}$ *Teilräume von* E *mit den folgenden Eigenschaften (entsprechend mit Balken):*

(1) $$F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq F \cap G ,$$

(2) $$(F \cap G)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} ,$$

(3) $$\dim(((F+G) \cap (F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp}) / (F \cap (F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} + G \cap (F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp})) < \infty .$$

Dann repräsentiert das Diagramm 10 auf Seite 77 einen assoziierten Verband V_{58} . *Es gibt eine Isometrie* $T: E \to E$ *mit* $TF = \overline{F}$ *und* $TG = \overline{G}$, *falls die Verbände* V_{58} *und* $\overline{V}_{58}$ *die gleichen entsprechenden Indices besitzen.*

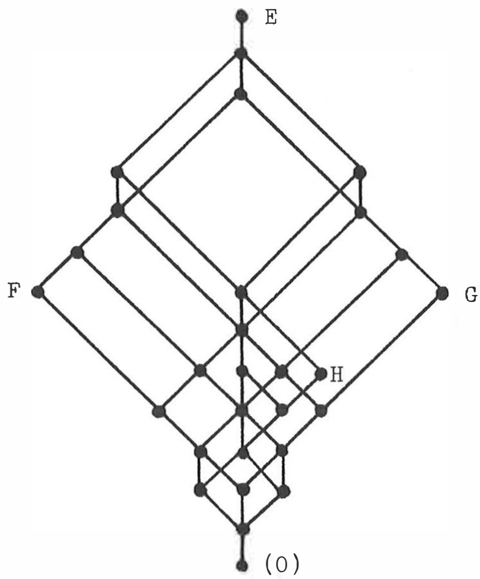
Fall (B). Es gelte $D^{\perp} = D + S$. Wegen der Voraussetzung $S \subseteq D^{\perp} \subseteq D + S$ ist dies erfüllt genau dann wenn D totalisotrop ist. Es ist offenbar, dass der vorige Satz mit einer Betrachtung von V_{58} gilt, wenn wir die Bedingung (2) des Satzes durch

(2') $$(F \cap G^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (G \cap F^{\perp\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$$

ersetzen. Die Diskussion der irreduziblen Elemente von V_{58} ist analog, aber mit dem Unterschied, dass jetzt wegen $D^{\perp\perp} = D^{\perp} = D + S$ D wiederum orthostabil ist.

3.5. Über die Abbildungsaufgabe bei Tripeln (F , G , H)

Bei der Lösung der Konstruktionsaufgabe für drei gegebene Teilräume F, G und H begegnet man wesentlich grössere Schwierigkeiten als im Falle von zwei Teilräumen. Diese entstehen aus der Tatsache, dass schon der Verband $V_S(F, G, H)$ im allgemeinen nicht distributiv ist und wie folgt aussieht:



Um die nicht distributive Stelle dieses Verbandes überwinden zu können, braucht man recht strenge Voraussetzungen über das Tripel (F, G, H). Zur Dimensionsbedingung

(0) $\qquad \dim((F \cap (G+H))/(F \cap G + F \cap H)) < \infty$

kommt noch das Problem, eine Isometrie zu finden, durch die die drei nicht primen Elemente erlaubt gemacht werden. Die folgenden Möglichkeiten sind naheliegend:

(A) $\qquad F \cap G \cap H$ liegt dicht in E,

(B) $\qquad F$, G und H stehen senkrecht aufeinander.

Im ersten Fall ist der Verband V_{30} orthostabil, und wir können wegen (0) Lemma 3.1 zitieren und $F \cap G \cap H$ als Korrigierungsraum anwenden, um eine Isometrie für den ersten Kandidaten zu finden.

Der Fall (B) ist komplizierter.

Wir nehmen zuerst an, dass die Räume F, G und H die folgenden vier Bedingungen erfüllen:

(1) $\qquad F$, G und H sind abgeschlossen, totalisotrop und stehen senkrecht aufeinander,

(2) $F + G \cap H$, $G + F \cap H$ und $H + F \cap G$ sind abgeschlossen,

(3) $F^{\perp} + G^{\perp} \cap H^{\perp}$, $G^{\perp} + F^{\perp} \cap H^{\perp}$ und $H^{\perp} + F^{\perp} \cap G^{\perp}$ sind abgeschlossen,

(4) $$\dim((F \cap (G+H))/(F \cap G + F \cap H)) < \infty ,$$
$$\dim(((F+H)^{\perp\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp} + (G+H)^{\perp\perp}) / ((F+H)^{\perp\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp} + (F+H)^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp})) < \infty ,$$
$$\dim((F^{\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp}))/(F^{\perp} \cap G^{\perp} + F^{\perp} \cap H^{\perp})) < \infty ,$$
$$\dim(((F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} + (G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})) / ((F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} + (F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})) < \infty .$$

Wir berechnen den Verband $V_{216}(F, G, H)$, dessen unterer Teil in Diagramm 11, auf Seite 78 (bezeichnet mit $V_{108}{}^{I}(F, G, H)$), und oberer Teil in Diagramm 12, auf Seite 79 (bezeichnet mit $V_{108}{}^{II}(F^{\perp}, G^{\perp}, H^{\perp})$) dargestellt ist.

Alle primen irreduziblen Elemente von V_{216} sind orthostabil, was nach den Bedingungen (1)-(3) leicht zu verifizieren ist (s. Tabelle 7, auf Seite 80). Die beiden nicht distributiven Stellen sowohl in $V_{108}{}^{I}$ als auch in $V_{108}{}^{II}$ können wegen (4) bei der Konstruktion auf gewöhnliche Weise überwunden werden. In $V_{108}{}^{I}$ folgt dies sofort aus der Tatsache, dass $(F+G+H)^{\perp\perp} = 24$ totalisotrop ist, und für $V_{108}{}^{II}$ wenden wir Lemma 3.1 mit $F^{\perp} \cap G^{\perp} \cap H^{\perp} = 25$ in der Rolle des Korrekturraumes an. Jedoch scheint es unüberwindlich, alle vier nicht distributive Stellen gleichzeitig zu bewältigen. Nach obiger Diskussion halten wir also den folgenden Satz fest:

Satz 3.11. *Seien* (F, G, H) *(und* $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ *respektive) gegebene Tripel von Teilräumen von* E *mit den Bedingungen (0)-(4) (resp. mit Balken). Ferner sei die folgende Bedingung (auch mit Balken) erfüllt:*

(5) Ist (F, G, H) *oder* $((F+G)^{\perp\perp}, (F+H)^{\perp\perp}, (G+H)^{\perp\perp})$ *ein nicht distributives Tripel, so sind* $(F^{\perp}, G^{\perp}, H^{\perp})$ *und* $((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp}, (F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp}, (G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})$ *beide distributive Tripel.*

Dann gibt es die assoziierten Teilverbände $V \subseteq V_s(F, G, H)$ *und* $\overline{V} \subseteq \overline{V}_s(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$, *die höchstens 216 Elemente enthalten (vgl. Diagramm von* V_{216} , *S. 78-79) und derart, dass ein zulässiger Orthoisomorphismus* $\tau: V \to \overline{V}$ *existiert. Insbesondere gibt es dann eine Isometrie* $T: E \to E$ *mit* $TF = \overline{F}$, $TG = \overline{G}$ *und* $TH = \overline{H}$.

Die Diagramme 11 und 12 auf Seiten 78-79 geben Anlass den folgenden Satz zu beweisen:

S a t z 3.12. *Seien* F, G *und* H *abgeschlossene Teilräume von* E , *die senkrecht aufeinander stehen und neben den Voraussetzungen (2)-(5) des vorigen Satzes die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(6) $F + G + H$ *ist abgeschlossen,*

(7) $F + F^{\perp}$, $G + G^{\perp}$, *und* $H + H^{\perp}$ *sind abgeschlossen.*

Dann wird die Bahn des Tripels (F, G, H) *durch die Indices des assoziierten Verbandes* V_{233} *(s. Diagramm 13 auf Seite 82) charakterisiert.*

Beweis. Wegen (6) gelten die Inklusionen

$$(F + G)^{\perp\perp} \subseteq F + G + H \cap H^{\perp} , \qquad (F + H)^{\perp\perp} \subseteq F + H + G \cap G^{\perp} ,$$
$$(G + H)^{\perp\perp} \subseteq G + H + F \cap F^{\perp} .$$

Diese drei Abschlüsse bilden also ein distributives Tripel, wie man in Diagramm 13 auf Seite 82 verifiziert. Alle primen irreduziblen Elemente von V_{233} sind offenbar stabil.

Ist (F, G, H) ein distributives Tripel, so können wir die Diskussion von V_{108}^{I} und V_{108}^{II} wiederholen, und die rekursive Konstruktion offensichtlich mit Erfolg durchführen.

Ist (F, G, H) ein nicht distributives Tripel, so verschwinden die sechs oberen nicht primen Elemente nach der Voraussetzung (5). Die drei nicht primen Elemente unten sind leicht zu behandeln, weil F , G und H senkrecht aufeinander stehen.

Den vorigen Satz kann man z.B. zur orthogonalen Trennung des Tripels (F, G, H) anwenden. Wir sagen nämlich, dass F , G und H orthogonal trennbar in E sind, falls eine Zerlegung

(8) $$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} E_3 ; \qquad F \subseteq E_1 , \quad G \subseteq E_2 , \quad H \subseteq E_3$$

mit $E_i \perp E_j$ für $i \neq j$ existiert. Aus (8) folgen die Beziehungen

$$(9)\qquad F \subset G^{\perp} \cap H^{\perp}, \qquad G \subset F^{\perp} \cap H^{\perp}, \qquad H \subset F^{\perp} \cap G^{\perp},$$

$$(10)\qquad F^{\perp} + G^{\perp} \cap H^{\perp} = G^{\perp} + F^{\perp} \cap H^{\perp} = H^{\perp} + F^{\perp} \cap G^{\perp} = E,$$

$$(11)\qquad (F+G)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp}, \qquad (G+H)^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} + H^{\perp\perp},$$
$$(F+H)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + H^{\perp\perp}, \qquad (F+G+H)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} + G^{\perp\perp} + H^{\perp\perp}.$$

Nach (10) gilt noch

$$F^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp} = G^{\perp\perp} \cap (F+H)^{\perp\perp} = H^{\perp\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp} = (0).$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Teilräume F, G und H von E die Eigenschaften (9)-(11) besitzen. Folglich sind also die Voraussetzungen des Satzes 3.12 trivialerweise erfüllt.

Um zu beweisen, dass F, G und H orthogonal trennbar in E seien, reicht es die folgende Aufgabe zu lösen: Man hat einen isometrischen Raum $\overline{E}$ mit den in $\overline{E}$ orthogonal trennbaren Teilräumen $\overline{F}$, $\overline{G}$ und $\overline{H}$ so zu konstruieren, dass es einen zulässigen Orthoisomorphismus $\tau: \mathcal{V}_{233}(F, G, H) \to \mathcal{V}_{233}(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ (s. Diagramm 13, Seite 82) gibt. Dieser Orthoisomorphismus sei (nach Satz 3.12) von einer Isometrie $T: E \to \overline{E}$ induziert. Die gewünschte orthogonale Trennung für F, G und H in E wird von der Abbildung T^{-1} geliefert. Diese Aufgabe ist für zwei Teilräume F und G von E in [8], Kap. VI, gelöst.

4. Diagramme und Tabellen

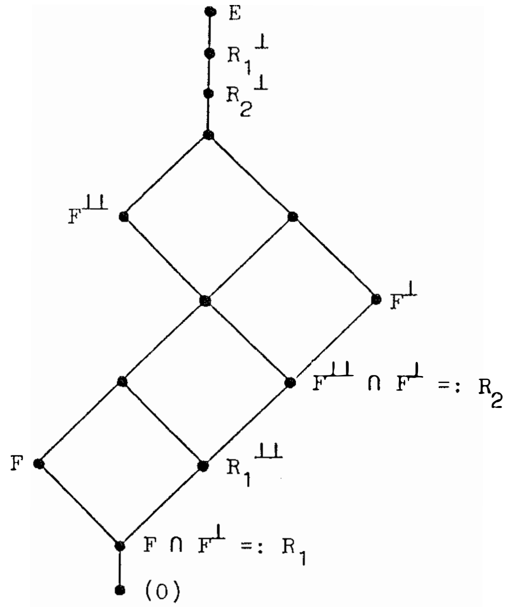


Diagramm 1. Der Kaplanskysche Verband $V_{14}(F)$.

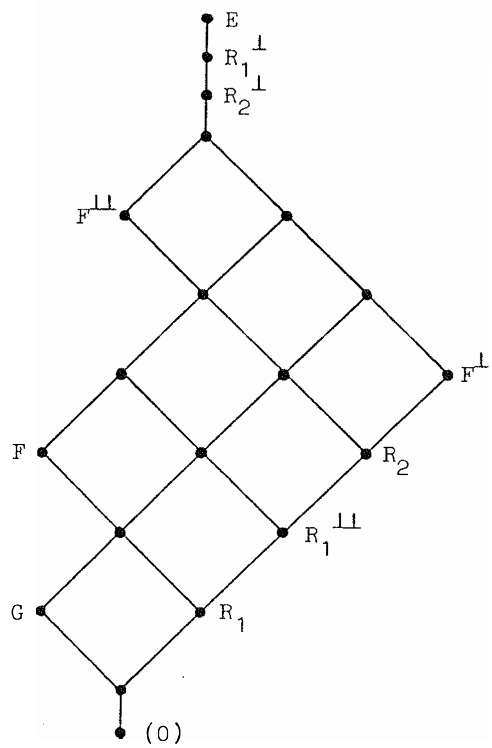


Diagramm 2. Der quasistabile Verband $V_{20}(F, G)$ (s. S. 20).

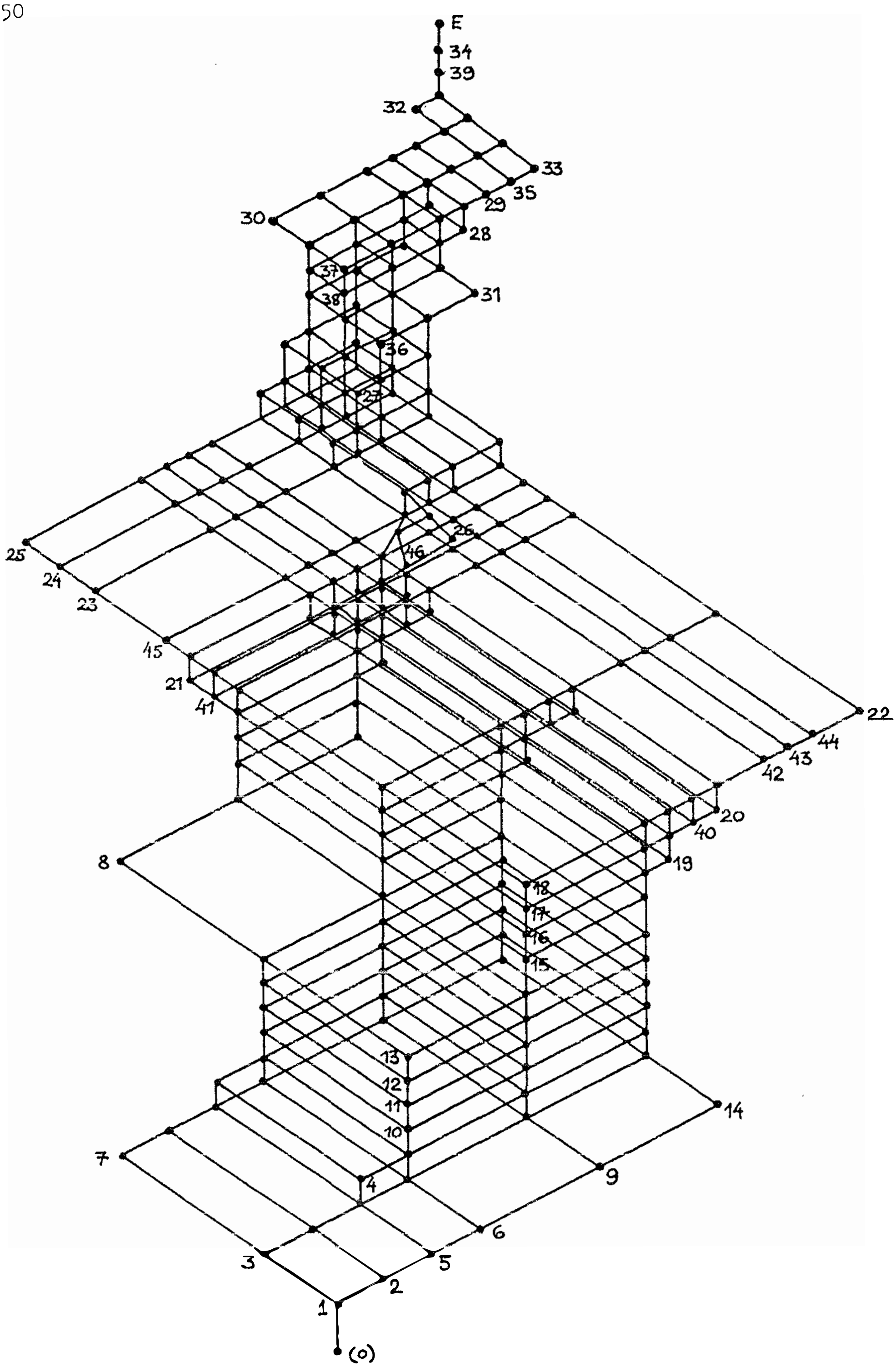


Diagramm 3 (A). $V_{247}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (A), S. 20; s. Tab. 1 (A), S. 56).

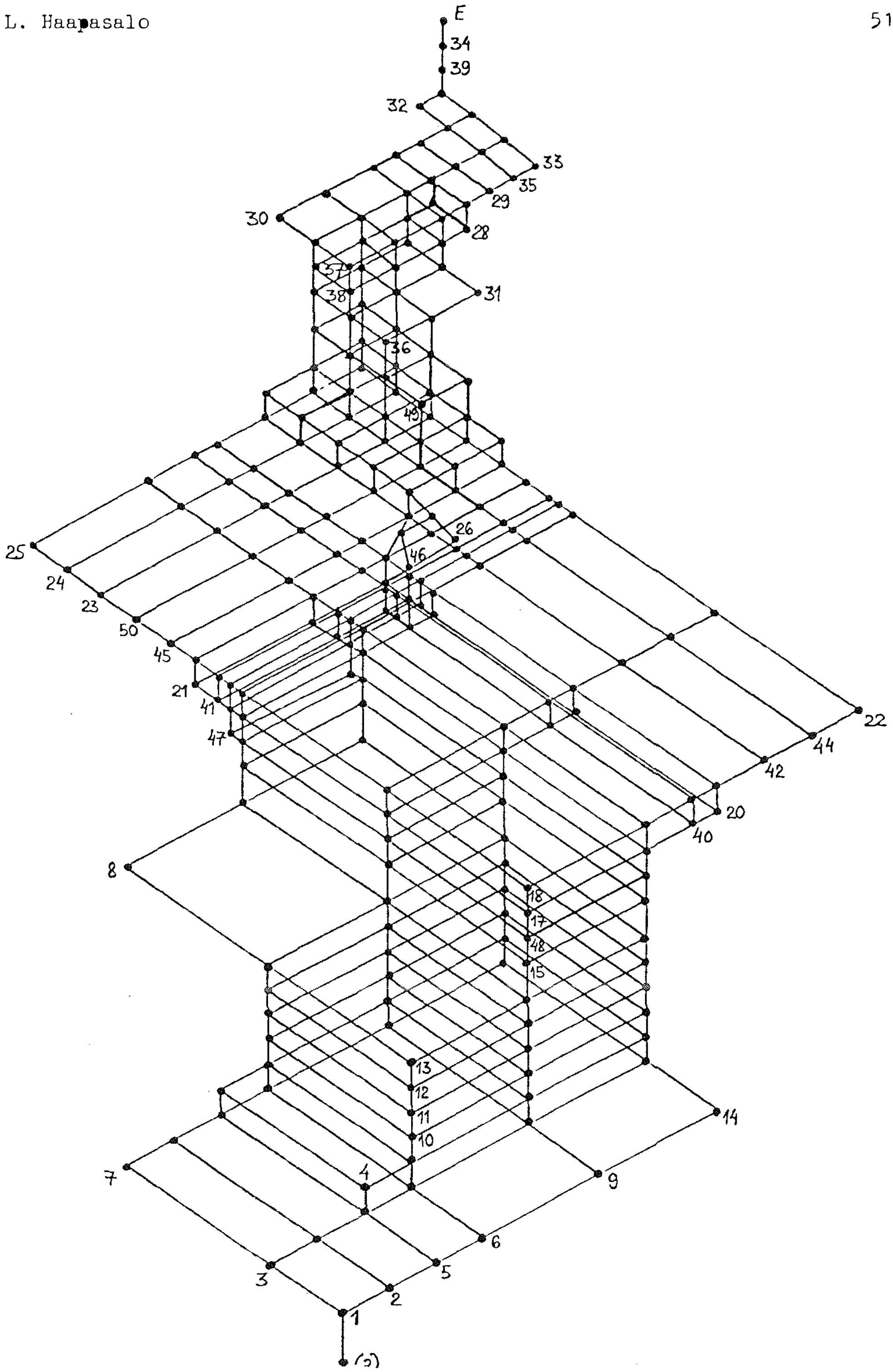


Diagramm 3 (B). $V_{239}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (B), S. 21; s. Tab. 1 (B), S. 56).

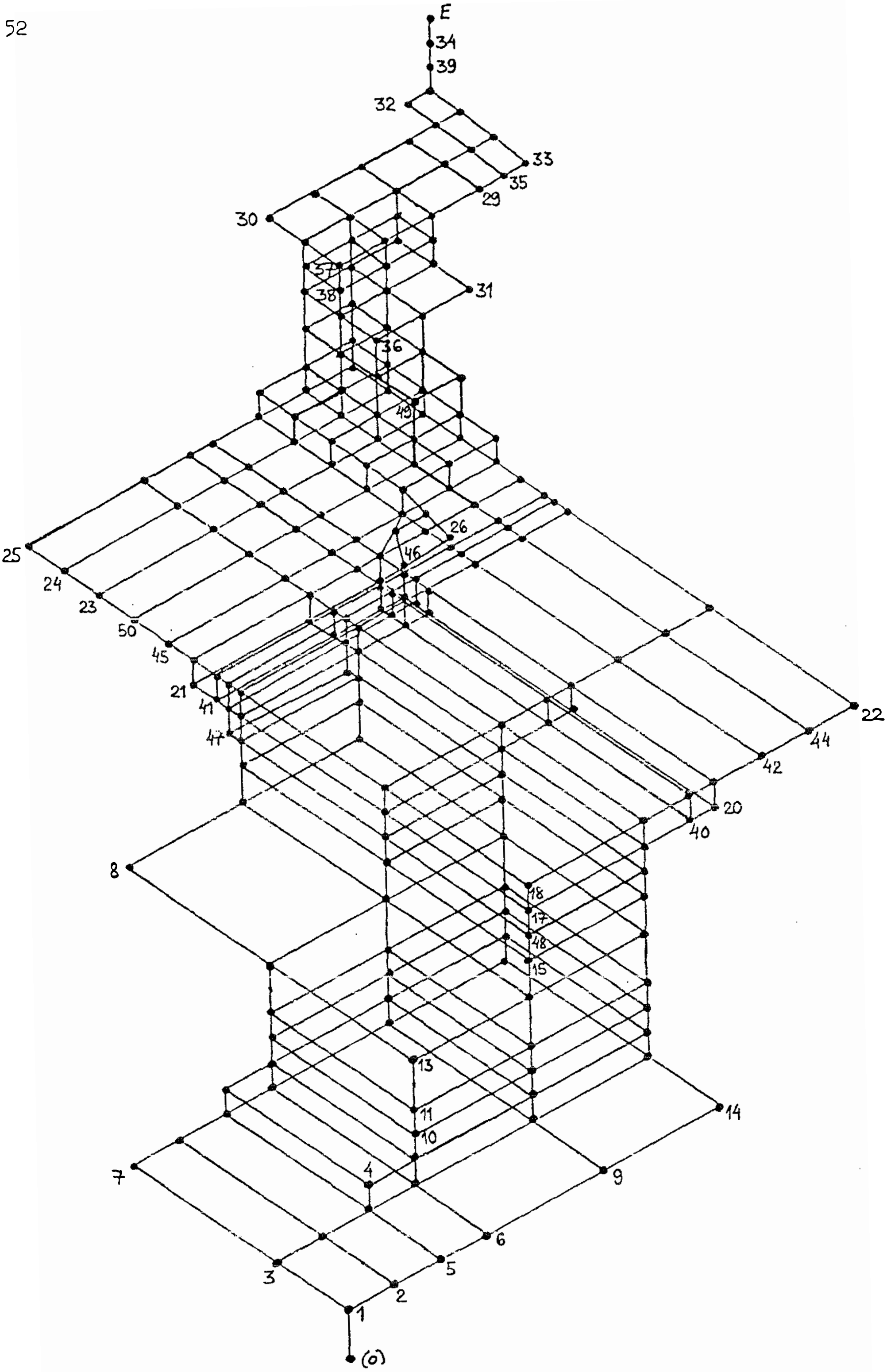


Diagramm 3 (C). $V_{228}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (C), S. 21; s. Tab. 1 (C), S. 56).

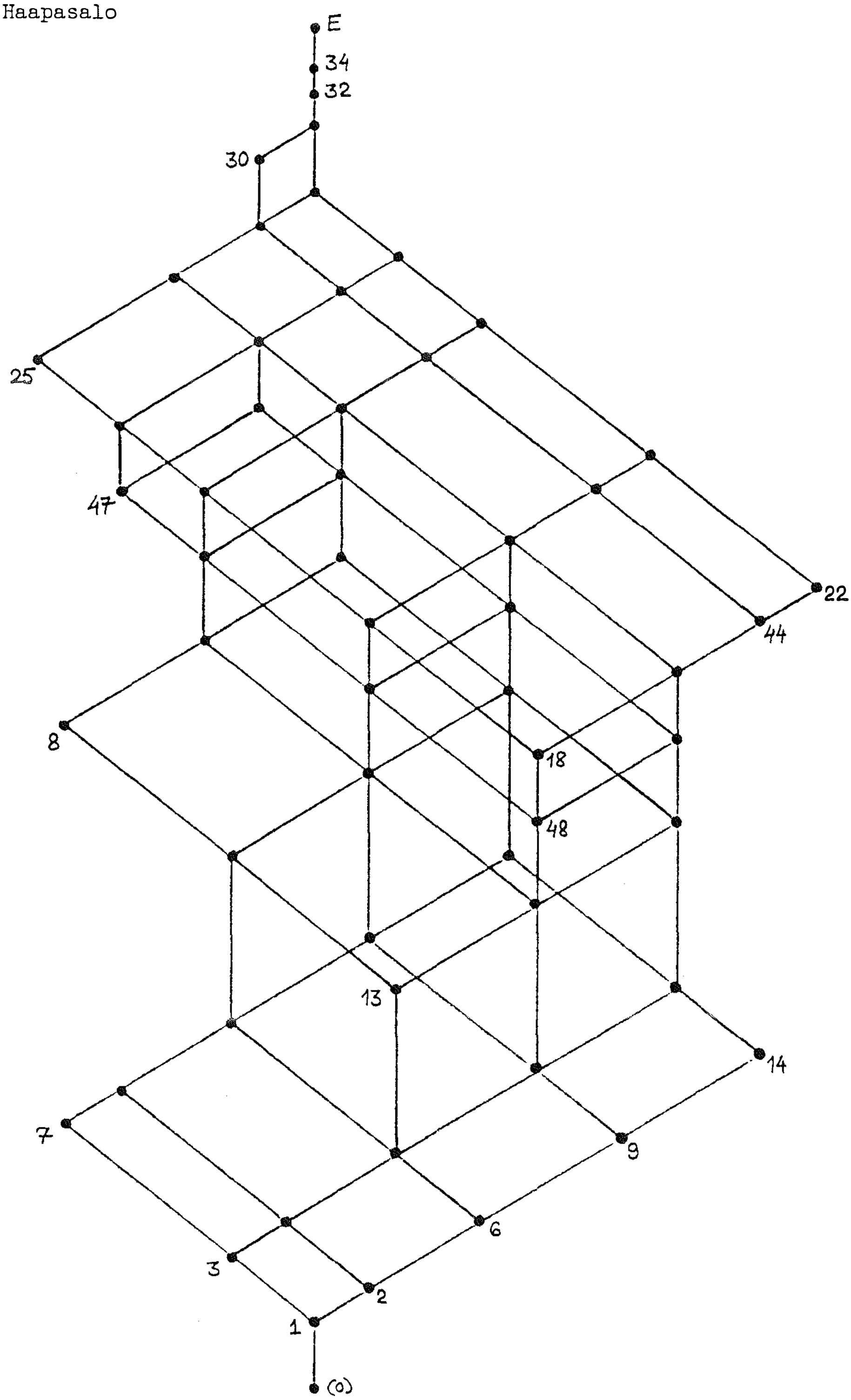


Diagramm 3 (D). $V_{58}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (D), S. 21; s. Tab. 1 (D), S. 56).

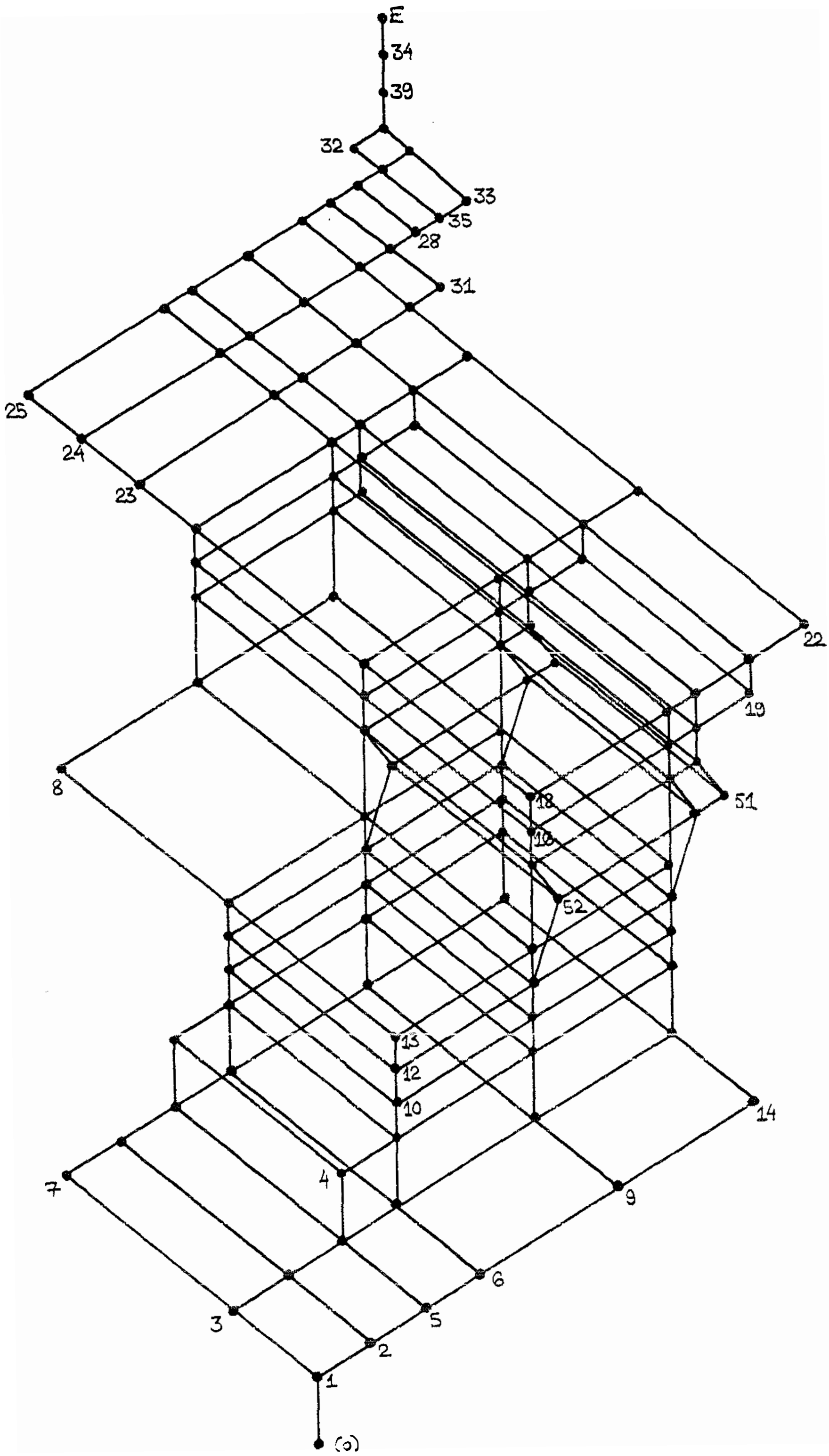


Diagramm 3 (E). $V_{119}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (E), S. 21; s. Tab. 1 (E), S. 56).

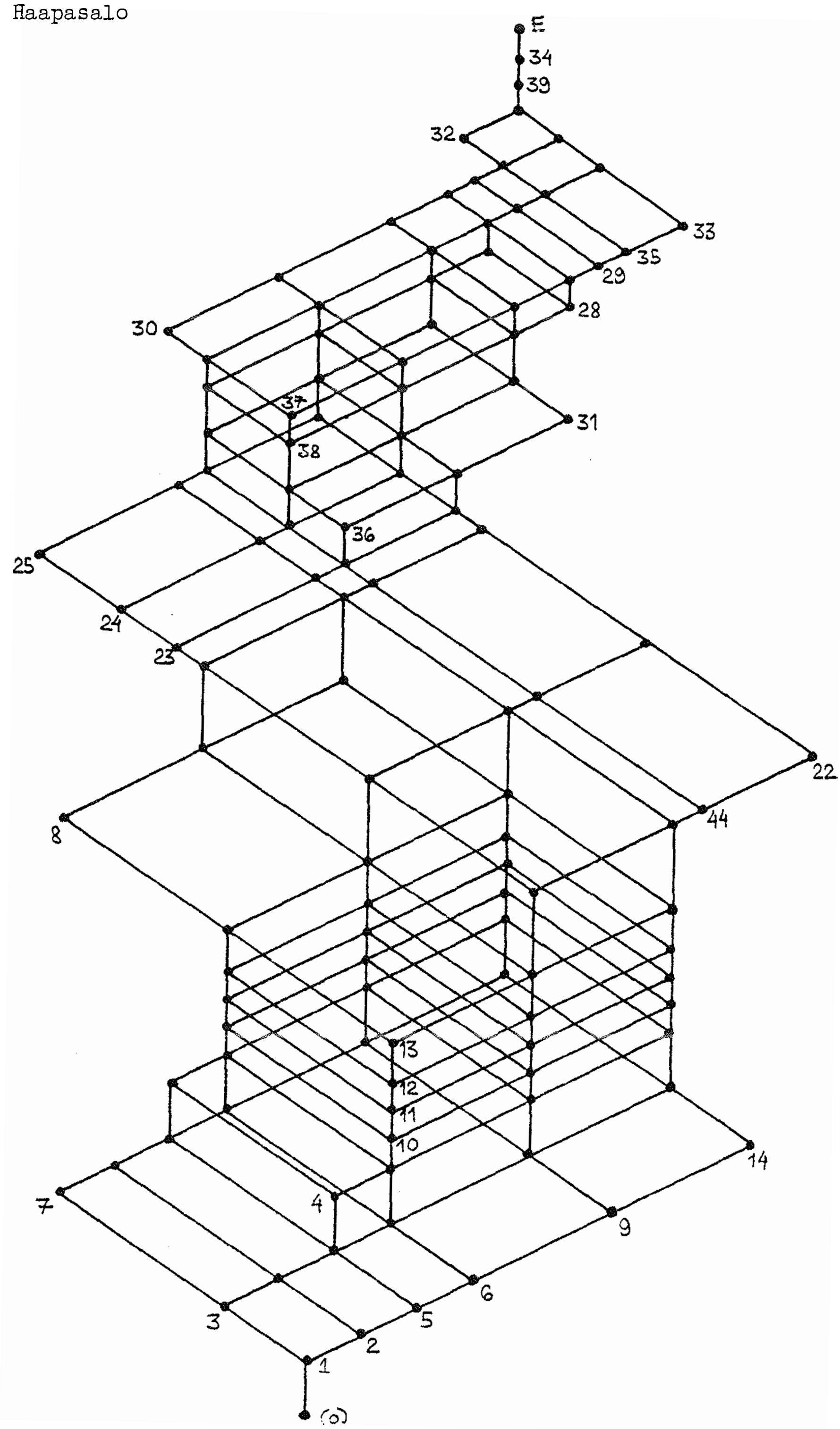


Diagramm 3 (F). $V_{121}(F, G)$ (Satz 3.3, Fall (F), S. 21; s. Tab. 1 (F), S. 56).

T a b e l l e 1 (A) - 1 (F). Die irreduziblen Elemente in den Diagrammen 3 (A) - 3 (F).[2]

		(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Nr.	B	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$
1	T	34	34	34	34	34	34
2	$T^{\perp\perp}$	34	34	34	34	34	34
3	S	33	33	33	q	33	33
4	$S^{\perp\perp}$	33	33	33		33	33
5	$Q \cap S^{\perp\perp}$	39	39	39		39	39
6	Q	32	32	32	32	32	32
7	G	22	22	22	22	22	22
8	$G^{\perp\perp}$	22	22	22	22	22	22
9	R	30	30	30	30	q	30
10	$(Q + S)^{\perp\perp}$	35	35	35		35	35
11	Z	29	29	29			29
12	U	28	28			28	28
13	P	31	31	31	q	31	31
14	$F^{\perp}$	25	25	25	25	25	25
15	$(P + R)^{\perp\perp}$	36	36	36			
16	Y	27				q	
17	$X \cap X^{\perp}$	18+26	18+26	18+26			
18	$V := X^{\perp}$	26	26	26	q	q	
19	$(F^{\perp} + P)^{\perp\perp}$	23				23	
20	$X \cap G^{\perp}$	18+41	18+41	18+41			
21	$X \cap F$	18+40	18+40	18+40			
22	$G^{\perp}$	8	8	8	8	8	8
23	$F \cap P^{\perp}$	19	q	19		19	14+13
24	$F \cap S^{\perp}$	12+14	12+14	q		51	51
25	F	14	14	14	14	14	14
26	X	18	18	18			
27	$Y^{\perp}$	16					

Wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

---

[2] Bezeichnungen: q: quasistabil, qq: quasiprim und quasistabil, leer: das Element fehlt.

		(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Nr.	B	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$
28	$U^{\perp}$	12	12			12	12
29	$Z^{\perp}$	11	11	11			11
30	$R^{\perp}$	9	9	9	9		9
31	$P^{\perp}$	13	13	13		13	13
32	$Q^{\perp}$	6	6	6	6	6	6
33	$S^{\perp}$	4	4	4		4	4
34	$T^{\perp}$	2	2	2	2	2	2
35	$Q^{\perp} \cap S^{\perp}$	10	10	10		10	10
36	$R^{\perp} \cap P^{\perp}$	15	15	15			9+13
37	$R^{\perp} \cap S^{\perp}$	9+11	9+11	9+11			9+11
38	$R^{\perp} \cap U^{\perp}$	9+12	9+12	9+12			9+12
39	$(Q \cap S^{\perp\perp})^{\perp}$	5	5	5		5	5
40	$X \cap (F \cap X)^{\perp}$	18+21	18+21	18+21			
41	$X \cap (G^{\perp} \cap X)^{\perp}$	18+20	18+20	18+20			
42	$(F + X) \cap G^{\perp}$	qq	qq	qq			
43	$G^{\perp} \cap Y^{\perp}$	q					
44	$G^{\perp} \cap R^{\perp}$	q	47	47	47		8+9
45	$F \cap (G^{\perp} + X)$	qq	qq	qq			
46	$(F + G^{\perp}) \cap X$	qq	qq	qq			
47	$(G + R)^{\perp\perp}$		44	44	44		
48	M		27	27	q		
49	$M^{\perp}$		19	19			
50	$F \cap M^{\perp}$		q	q			
51	$(F^{\perp} + S)^{\perp\perp}$					24	
52	$N := V \cap (F^{\perp} + S)^{\perp\perp}$					q	
Anzahl		46	46	44	18	29	31

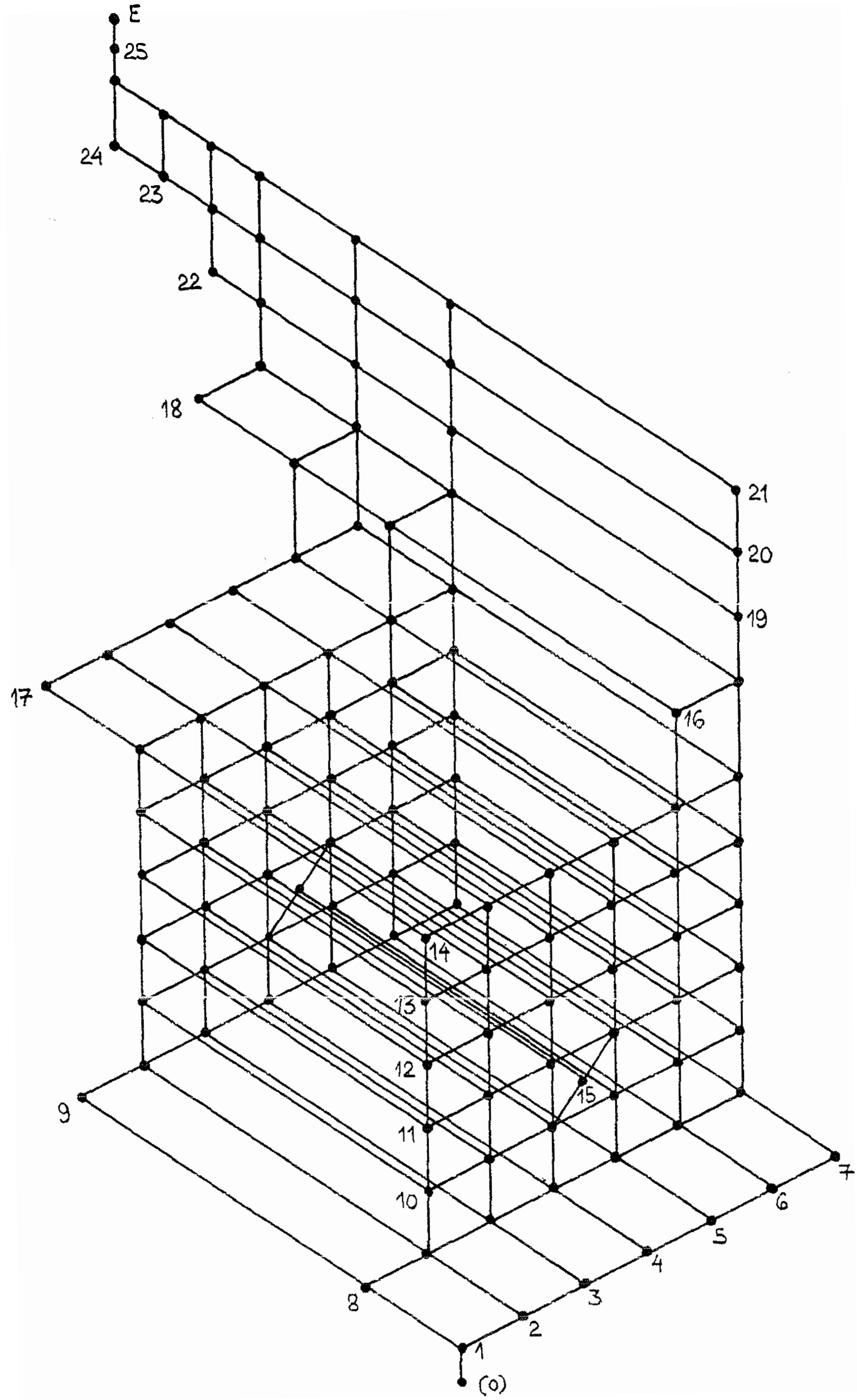


Diagramm 4 (A), (B). $V_{119}(F, G)$ (Satz 3.4, Fälle (A), (B), S. 26, 27; s. Tab. 2 (A) - 2 (B), S. 62).

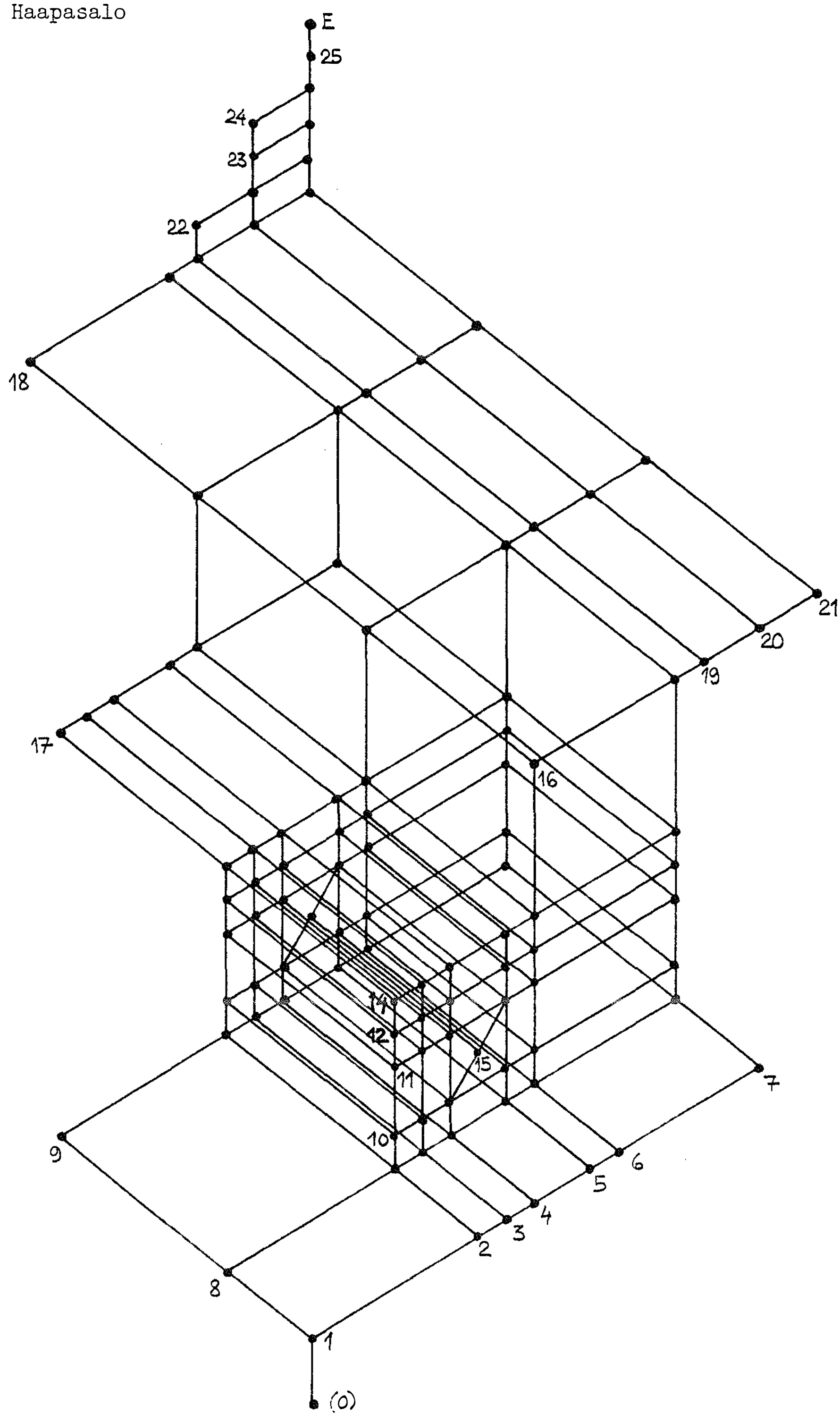


Diagramm 4 (C), (D). $V_{107}(F, G)$ (Satz 3.4, Fälle (C), (D), S. 27; s. Tab. 2 (C) - 2 (D), S. 62).

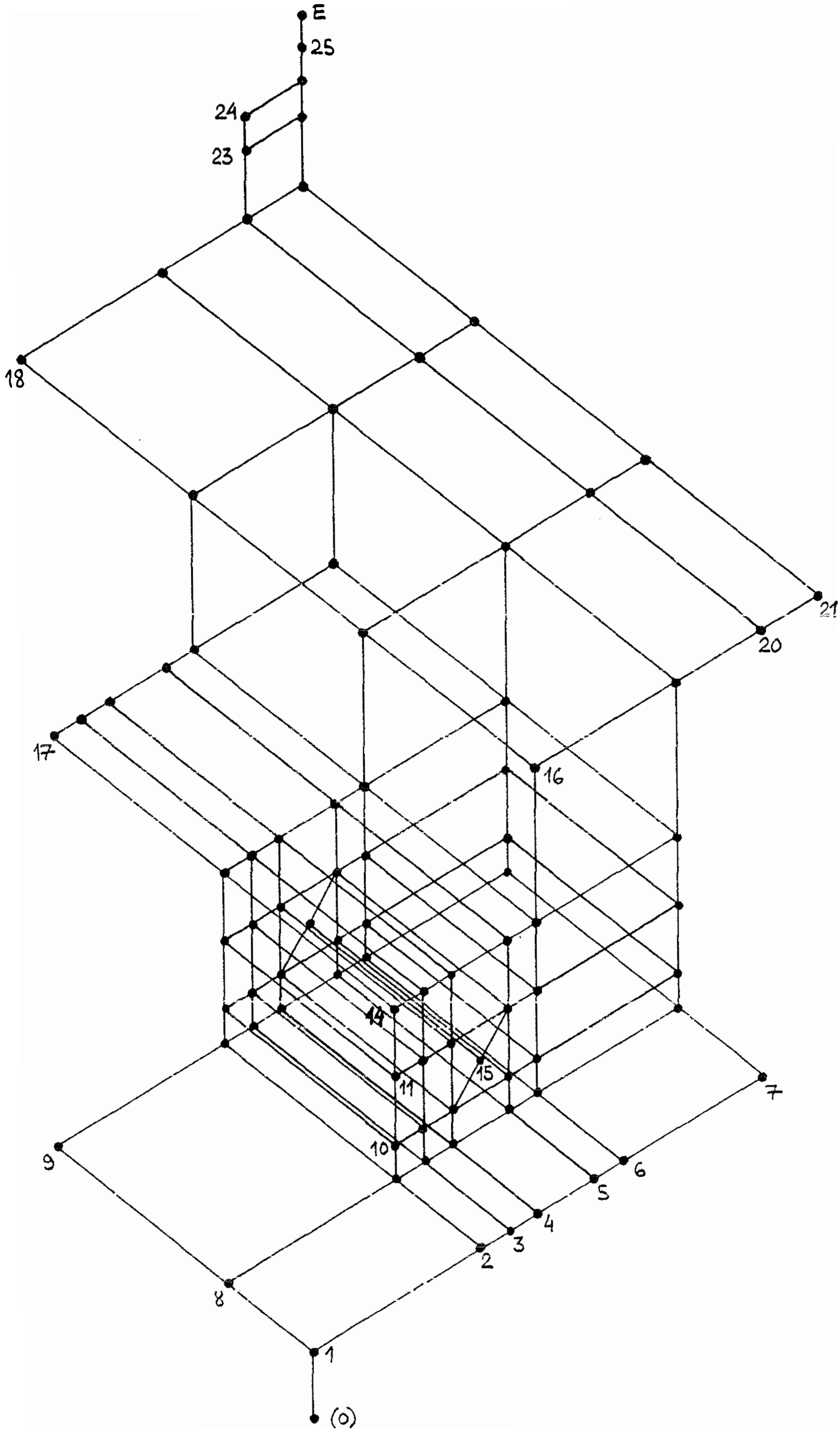


Diagramm 4 (E). $V_{88}(F, G)$ (Satz 3.4, Fall (E), S. 27; s. Tab. 2 (E), S. 62).

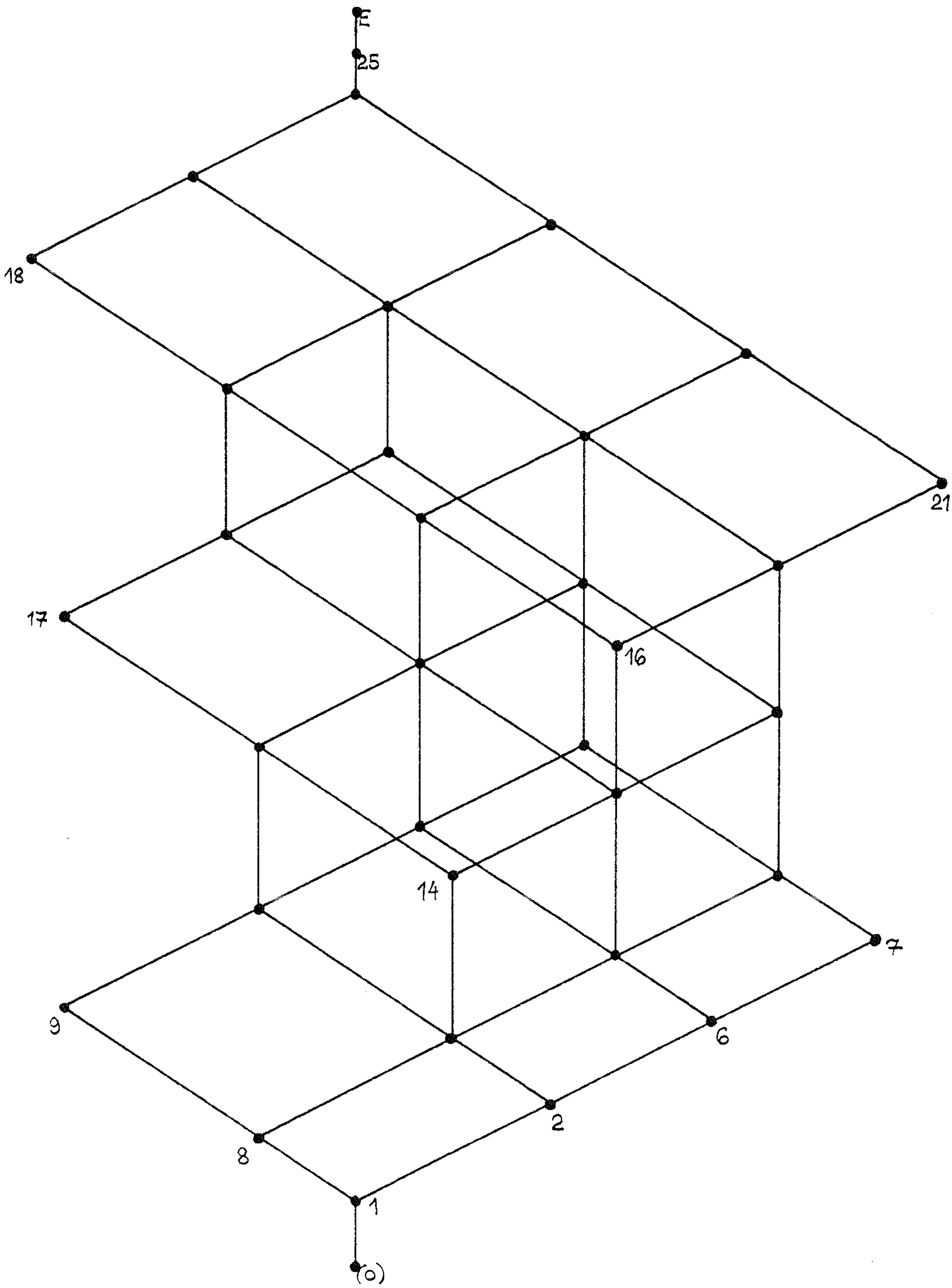


Diagramm 4 (F), (G). V_{36}(F , G) (Satz 3.4, Fälle (F), (G), S. 27; s. Tab. 2 (F) - 2 (G), S. 62).

T a b e l l e 2 (A) - 2 (G). Die irreduziblen Elemente in den Diagrammen 4 (A) - 4 (G).

		(A),(B)	(C),(D)	(E)	(F),(G)
Nr.	B	$B^{\blacktriangle}$	$B^{\blacktriangle}$	$B^{\perp}$	$B^{\blacktriangle}$
1	T	25	25	25	25
2	R_1	24	24	24	q
3	$R_1^{\perp\perp}$	24	24	24	
4	$F^{\perp} \cap Z$	23	23	23	
5	$F^{\perp} \cap (U + Z)$	qq	qq	qq	
6	R_2	22	22	q	q
7	$F^{\perp}$	18	18	18	18
8	S	9+21*	9+21*	9+21	q**
9	G	21	21	21	21
10	$U \cap Z$	q	q	q	
11	$U \cap (F^{\perp} + Z)$	qq	qq	qq	
12	$U \cap X$	q	q		
13	$U \cap V^{\perp}$	q		q	
14	U	q	q	q	q
15	$(F^{\blacktriangle} + U) \cap Z$	qq	qq	qq	
16	V	7+9+13	q	q	q
17	F	7	7	7	7
18	$F^{\perp\perp}$	7	7	7	7
19	$G^{\blacktriangle} \cap R_2^{\perp}$	6+9+12	6+9+12		
20	$G^{\perp} \cap R_1^{\perp}$	9+15	9+15	9+15	
21	$G^{\blacktriangle}$	9	9	9	9
22	$R_2^{\perp}$	6	6		
23	$(F^{\perp} \cap Z)^{\blacktriangle}$	4	4	4	
24	$R_1^{\perp}$	3	3	3	
25	$T^{\perp}$	1	1	1	1
Anzahl		25	24	22	12

* in Fällen (B), (D) quasistabil.

** im Fall (G) orthostabil.

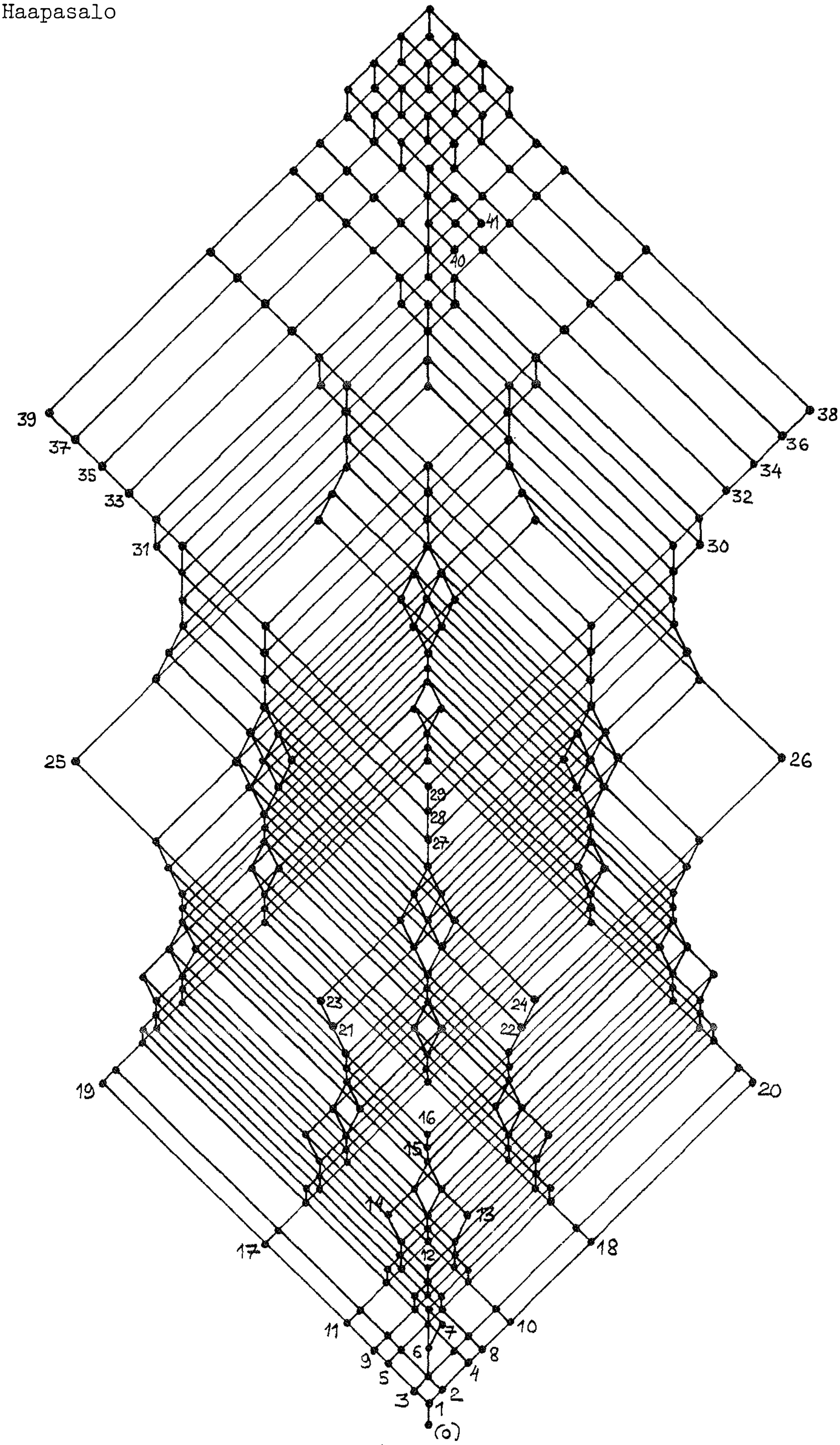


Diagramm 5 (A). $V_{377}(F, G)$ (der obere Teil des Diagrammes findet sich auf Seite 64) (Satz 3.5, Fall (A), S. 33; s. Tab. 3 (A), S. 68).

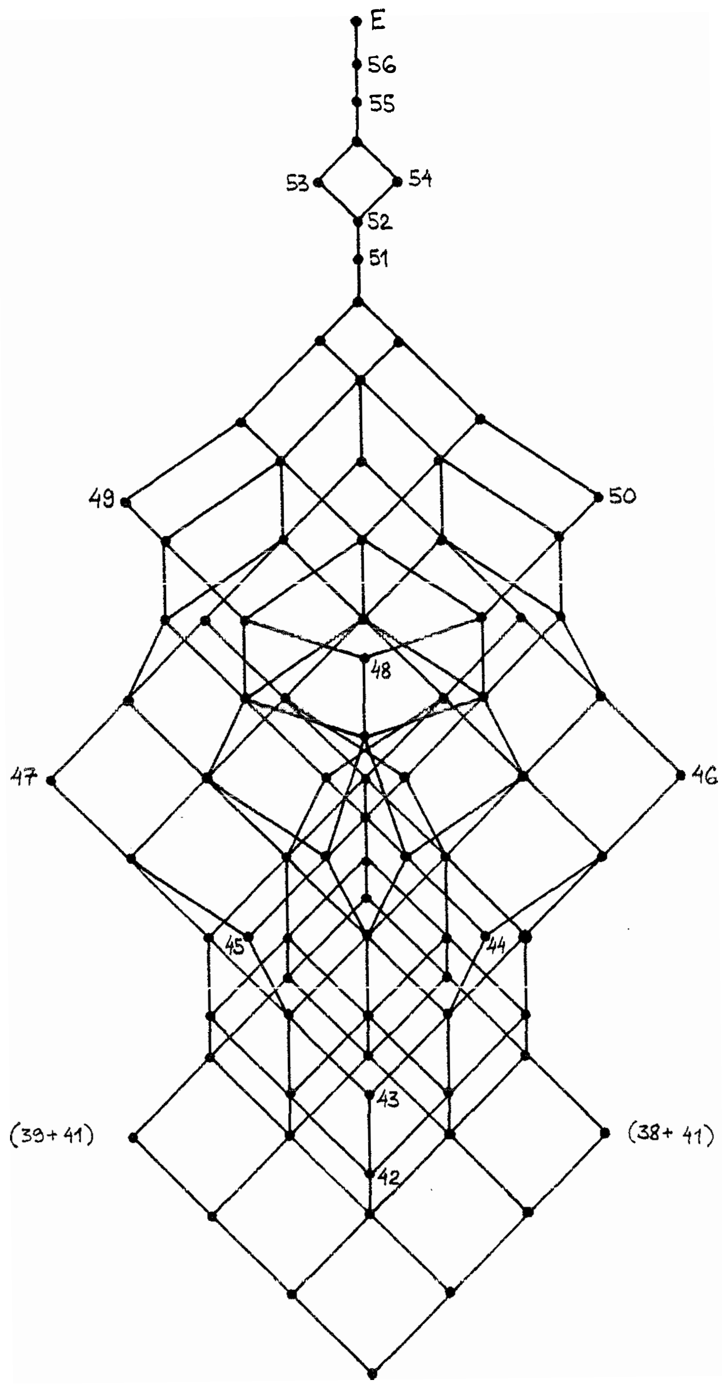


Diagramm 5 (A). Der obere Teil des Diagrammes 5 (A) (gleich der obere Teil des Diagrammes 5 (B)).

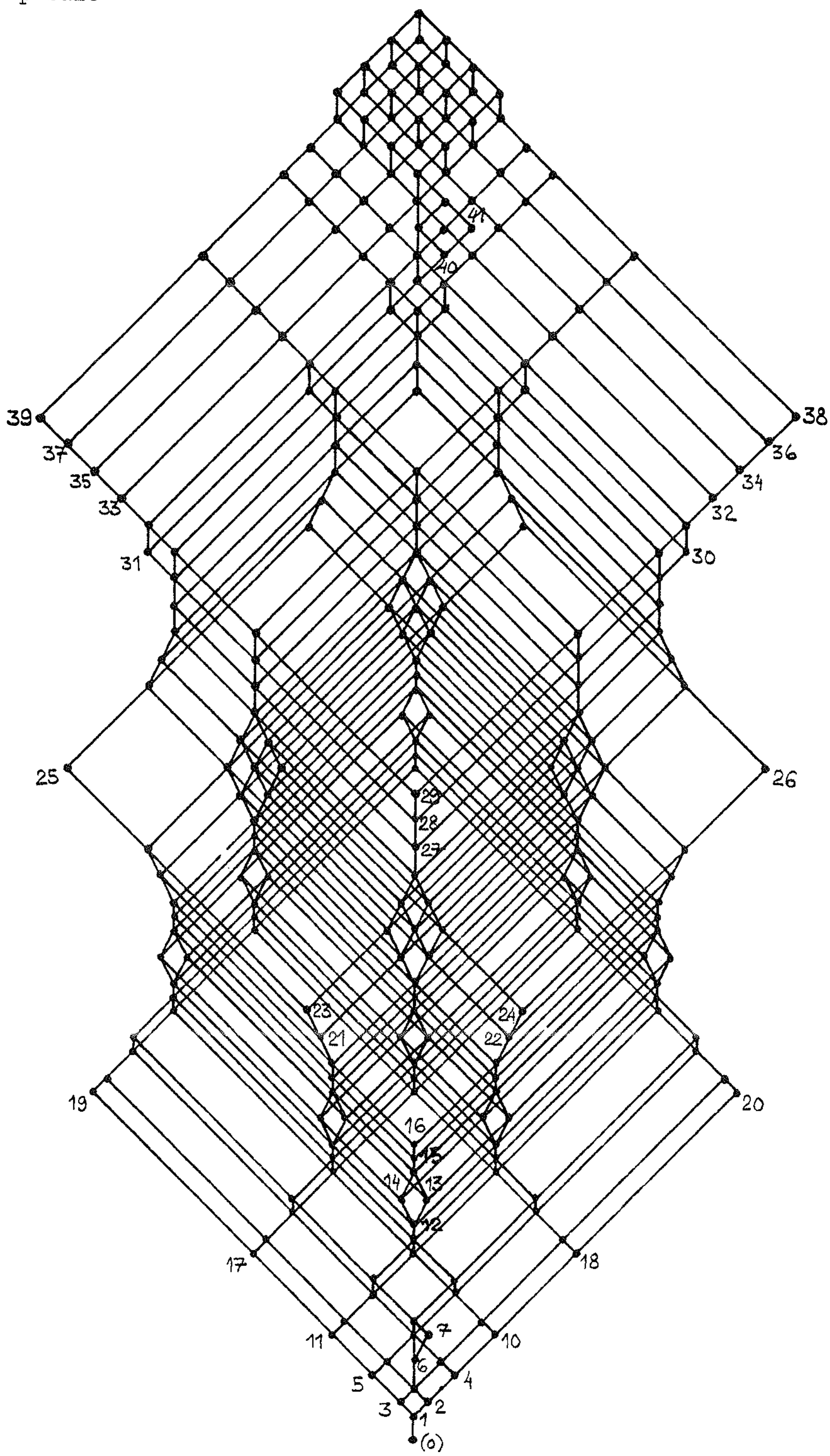


Diagramm 5 (B). $V_{342}(F, G)$ (der obere Teil des Diagrammes findet sich auf Seite 64) (Satz 3.5, Fall (B), S. 33; s. Tab. 3 (B), S. 68).

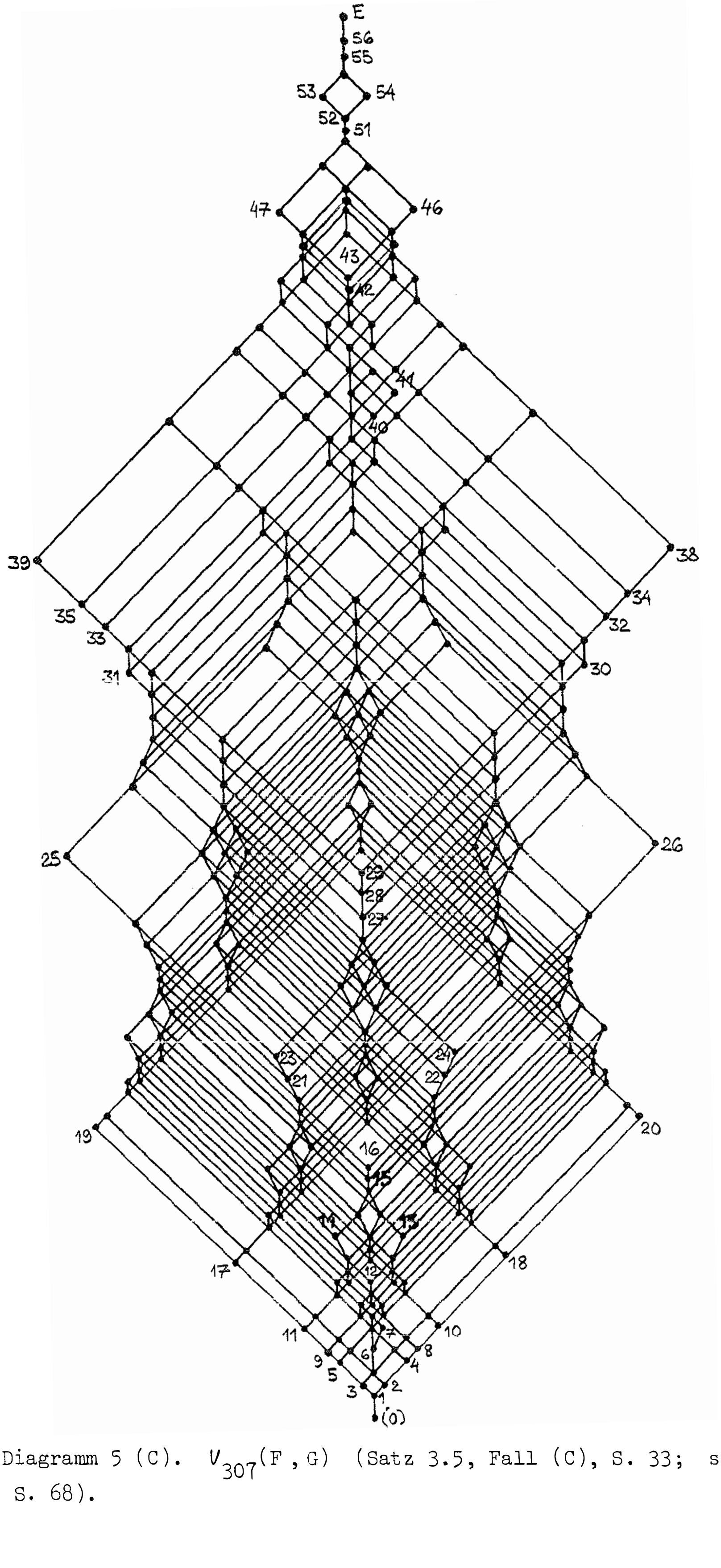


Diagramm 5 (C). $V_{307}(F, G)$ (Satz 3.5, Fall (C), S. 33; s. Tab. 3 (C), S. 68).

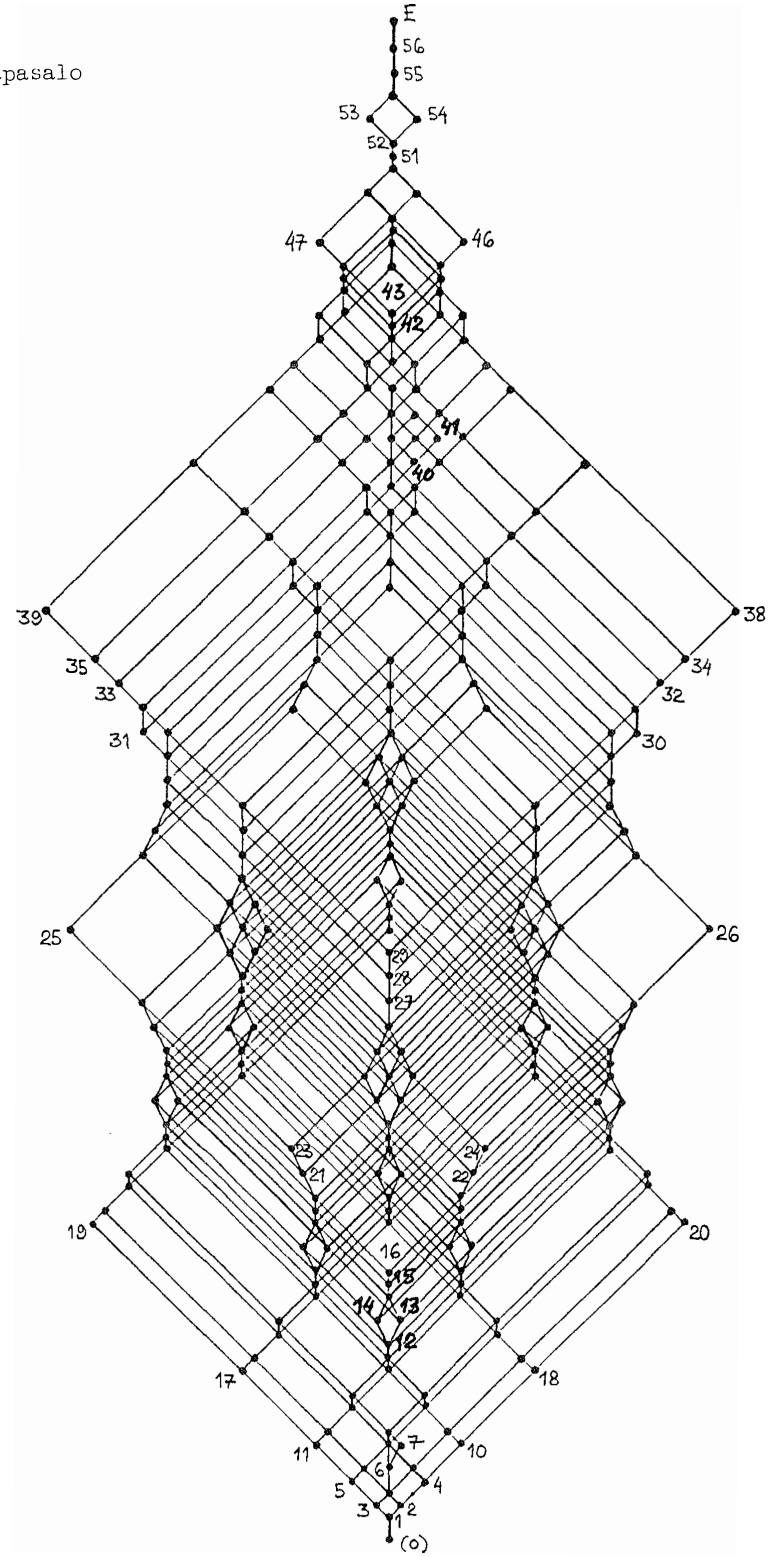


Diagramm 5 (D). V_{272}(F , G) (Satz 3.5, Fall (D), S. 33; s. Tab. 3 (D), S. 68).

Tabelle 3 (A) - 3 (D). Die irreduziblen Elemente in den Diagrammen 5 (A) - 5 (D).

		(A)	(B)	(C)	(D)
Nr.	B	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$
1	D	56	56	56	56
2	$G \cap D^{\perp\perp}$	56	56	56	56
3	$F \cap D^{\perp\perp}$	56	56	56	56
4	$G \cap (F + D^{\perp\perp})$	qq	qq	qq	qq
5	$F \cap (G + D^{\perp\perp})$	qq	qq	qq	qq
6	$(F + G) \cap D^{\perp\perp}$	56	56	56	56
7	$D^{\perp\perp}$	56	56	56	56
8	$G \cap L^{\perp\perp}$	q		q	
9	$F \cap M^{\perp\perp}$	q		q	
10	M	54	54	54	54
11	L	53	53	53	53
12	$M^{\perp\perp} \cap L^{\perp\perp}$	55	55	55	55
13	$M^{\perp\perp}$	54	54	54	54
14	$L^{\perp\perp}$	53	53	53	53
15	$(L + M)^{\perp\perp}$	52	52	52	52
16	N	51	51	51	51
17	H	49	49	49	47
18	K	50	50	50	46
19	F	39	39	39	39
20	G	38	38	38	38
21	$H^{\perp\perp}$	49	49		23
22	$K^{\perp\perp}$	50	50		24
23	P	47	47	47	47
24	Q	46	46	46	46
25	$F^{\perp\perp}$	39	39	39	39
26	$G^{\perp\perp}$	38	38	38	38
27	$(P + Q)^{\perp\perp}$	43	43	43	43
28	$R \cap R^{\perp}$	42	42	42	42
29	R	41	41	41	41
30	$G^{\perp} \cap R^{\perp}$	34	34	34	34
31	$F^{\perp} \cap R^{\perp}$	35	35	35	35

Wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

		(A)	(B)	(C)	(D)
Nr.	B	$B^{\blacktriangle}$	$B^{\blacktriangle}$	$B^{\blacktriangle}$	$B^{\blacktriangle}$
32	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + R^{\perp})$	qq	qq	qq	qq
33	$F^{\perp} \cap (F^{\perp} + R^{\perp})$	qq	qq	qq	qq
34	$G^{\blacktriangle} \cap P^{\perp}$	30	30	30	30
35	$F^{\perp} \cap Q^{\perp}$	31	31	31	31
36	$G^{\perp} \cap H^{\perp}$	21+26	21+26		
37	$F^{\perp} \cap K^{\perp}$	22+25	22+25		
38	$G^{\perp}$	26	26	26	26
39	$F^{\blacktriangle}$	25	25	25	25
40	$(F^{\perp} + G^{\perp}) \cap R^{\perp}$	qq	qq	qq	qq
41	$R^{\blacktriangle}$	29	29	29	29
42	$(R + R^{\perp})^{\perp\perp}$	28	28	28	28
43	$P^{\perp} \cap Q^{\perp}$	27	27	27	27
44	$H^{\perp} \cap Q^{\perp}$	21+24		21+24	21+24
45	$P^{\perp} \cap K^{\perp}$	22+23		22+23	22+23
46	$Q^{\perp}$	24	24	24	24
47	$P^{\blacktriangle}$	23	23	23	23
48	$H^{\perp} \cap K^{\perp}$	21+22	21+22		
49	$H^{\perp}$	21	21		
50	$K^{\perp}$	22	22		
51	$N^{\perp}$	16	16	16	16
52	$L^{\perp} \cap M^{\perp}$	15	15	15	15
53	$L^{\blacktriangle}$	14	14	14	14
54	$M^{\perp}$	13	13	13	13
55	$(L^{\perp} + M^{\perp})^{\perp\perp}$	12	12	12	12
56	$D^{\perp}$	7	7	7	7
Anzahl		56	52	49	49

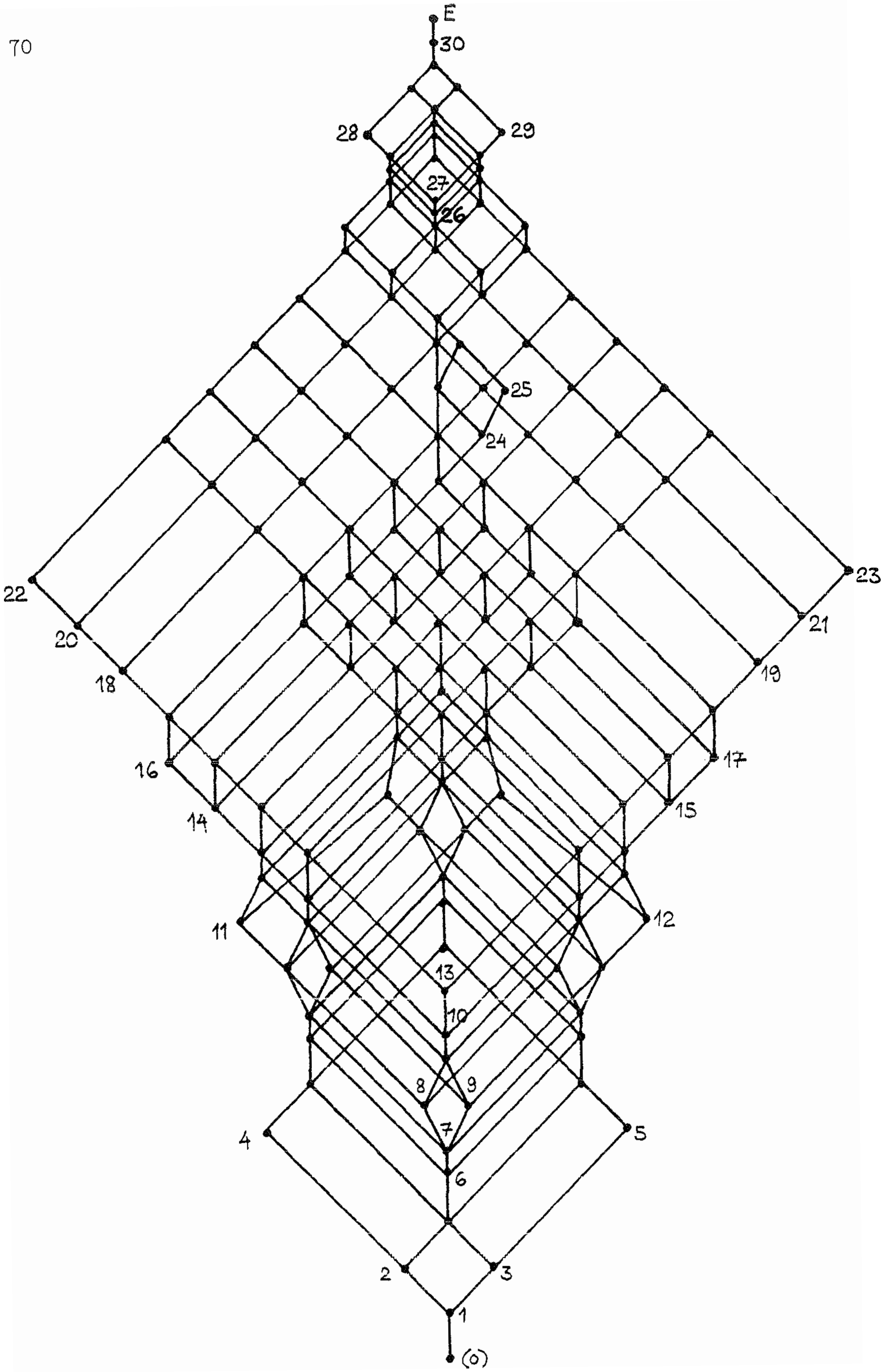


Diagramm 6 (A). $V_{155}(F, G)$ (Satz 3.7, Fall (A), S. 37; s. Tab. 4 (A), S. 72).

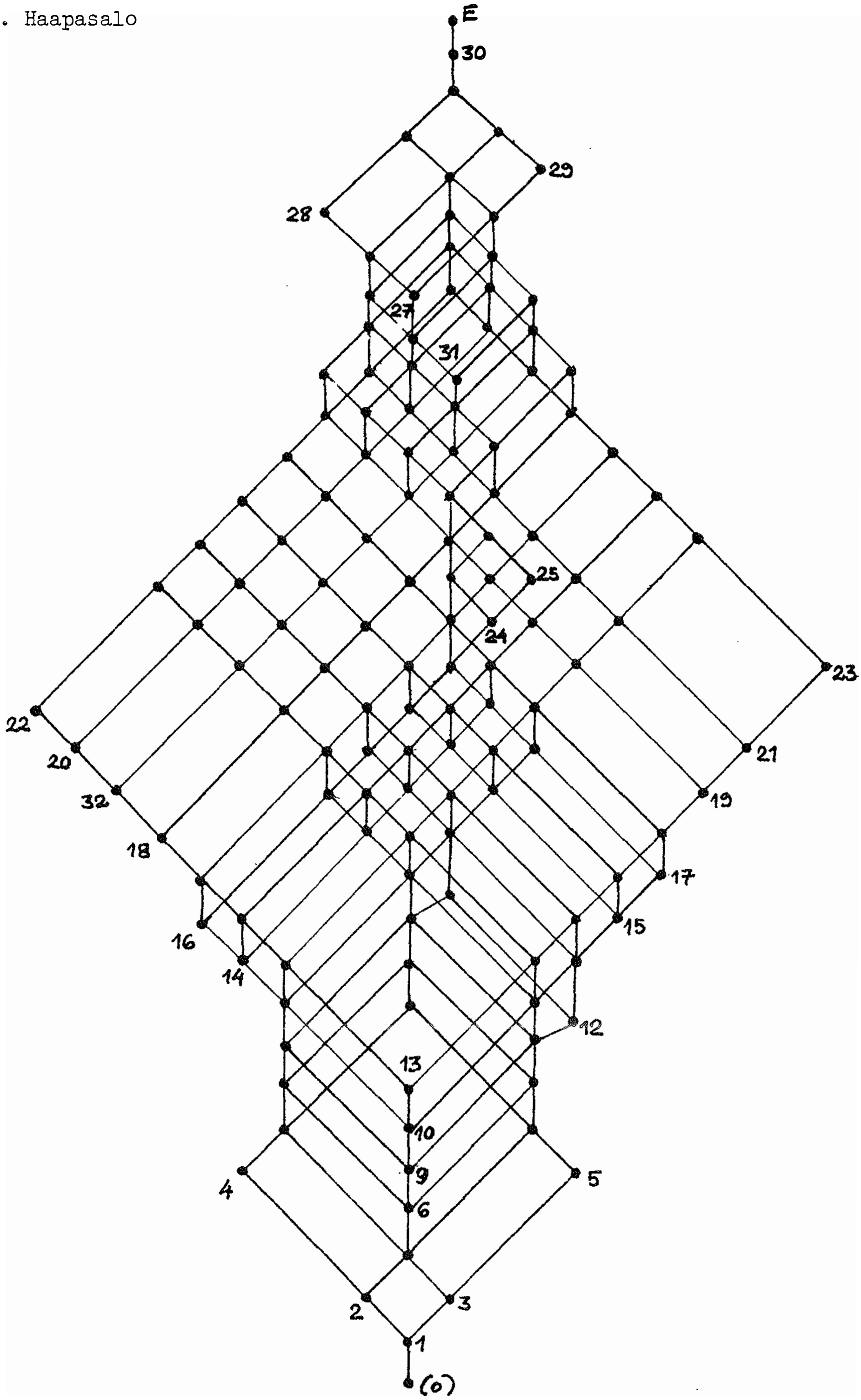


Diagramm 6 (B). $V_{137}(F, G)$ (Satz 3.7, Fall (B), S. 37; s. Tab. 4 (B), S. 72).

Tabelle 4 (A) - 4 (B). Die irreduziblen Elemente in den Diagrammen 6 (A) - 6 (B).

		(A)	(B)
Nr.	B	$B^{\perp}$	$B^{\perp}$
1	D	29	29
2	H	27	27
3	K	28	28
4	F	22	22
5	G	23	23
6	$(H+K)^{\perp\perp}$	27	27
7	$(F+K)^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp}$	26	
8	$R \cap (F+K)^{\perp\perp}$	20+25	
9	$R \cap (G+H)^{\perp\perp}$	21+25	31
10	$R \cap R^{\perp}$	13+25	13+25
11	$(F+K)^{\perp\perp}$	20	20
12	$(G+H)^{\perp\perp}$	21	21
13	R	25	25
14	$R^{\perp} \cap (F+R)^{\perp\perp}$	13+16	13+16
15	$R^{\perp} \cap (G+R)^{\perp\perp}$	13+17	13+17
16	$F^{\perp} \cap R^{\perp}$	13+14	13+14
17	$G^{\perp} \cap R^{\perp}$	13+15	13+15
18	$F^{\perp} \cap (G^{\perp} + R^{\perp})$	qq	qq
19	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + R^{\perp})$	qq	qq
20	$F^{\perp} \cap K^{\perp}$	11	q
21	$G^{\perp} \cap H^{\perp}$	12	12
22	$F^{\perp}$	4	4
23	$G^{\perp}$	5	5
24	$R^{\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$	qq	qq
25	$R^{\perp}$	13	13
26	$(G^{\perp} \cap H^{\perp} + F^{\perp} \cap K^{\perp})$	7	7
27	$H^{\perp} \cap K^{\perp}$	6	6
28	$H^{\perp}$	2	2
29	$K^{\perp}$	3	3
30	$D^{\perp}$	1	1
31	$(R^{\perp} + G^{\perp} \cap H^{\perp})^{\perp\perp}$		9
32	$F^{\perp} \cap (R^{\perp} + G^{\perp} \cap H^{\perp})^{\perp\perp}$		q
Anzahl		30	30

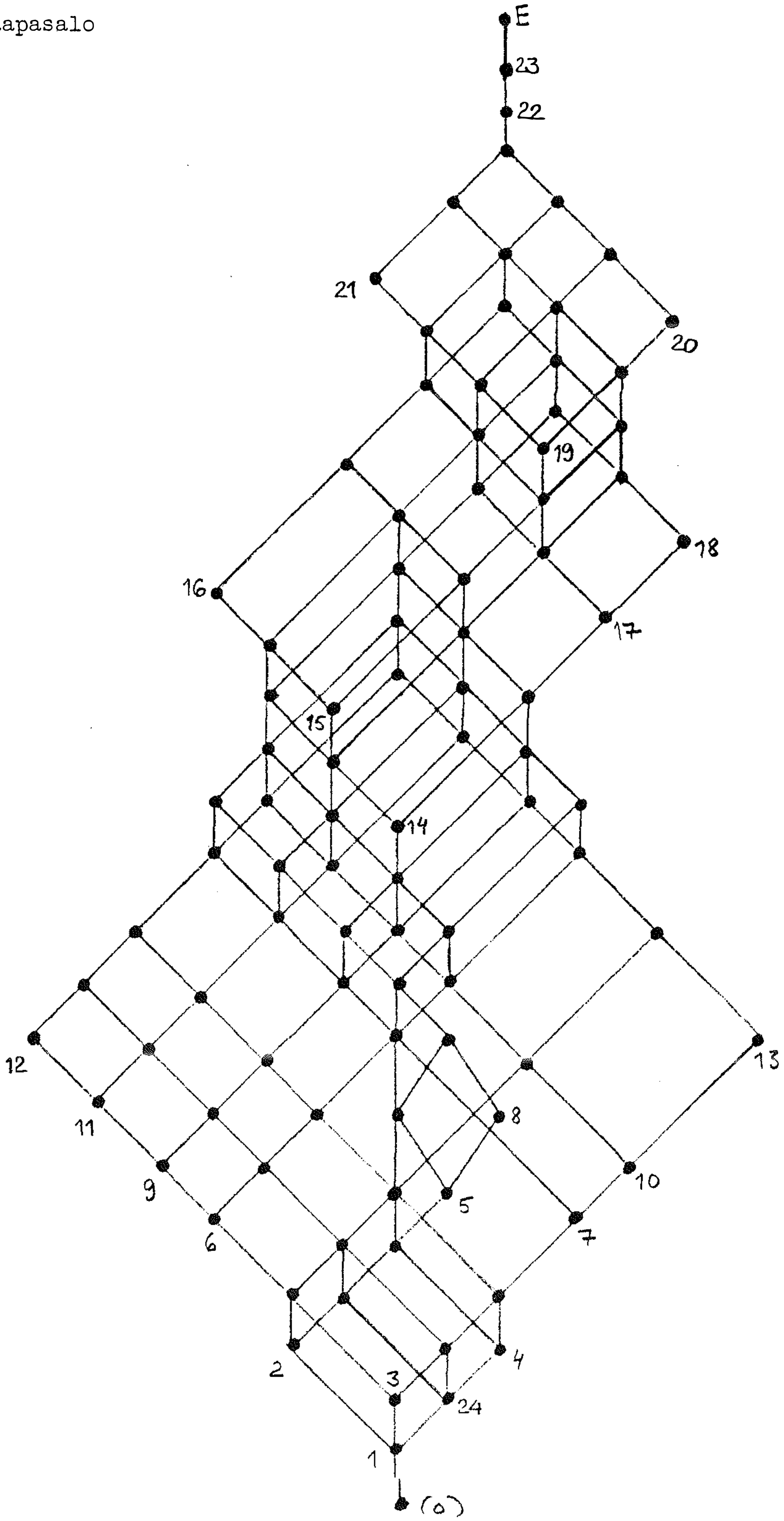


Diagramm 7. $V_{98}(F, G)$ (Satz 3.8, S. 39; s. Tab. 5, S. 74).

Tabelle 5. Die irreduziblen Elemente in Diagramm 7.

Nr.	B	$B^{\perp}$
1	$G \cap F^{\perp} \cap G^{\perp}$	23
2	$G \cap F^{\perp}$	q
3	$G \cap G^{\perp}$	q
4	$F^{\perp} \cap G^{\perp}$	23
5	$F^{\perp} \cap (G + G^{\perp})$	qq
6	$G \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$	qq
7	$G^{\perp} \cap (G + F^{\perp})$	q
8	$F^{\perp}$	20
9	$F \cap G$	q
10	$G^{\perp\perp} \cap G^{\perp}$	21
11	$F^{\perp\perp} \cap G$	8+13
12	G	13
13	$G^{\perp}$	16
14	$F \cap G^{\perp\perp}$	8+13
15	$F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$	8+13
16	$G^{\perp\perp}$	13
17	$F \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	8+10
18	F	8
19	$F^{\perp\perp} \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	8+10
20	$F^{\perp\perp}$	8
21	$(G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	10
22	$(F + G)^{\perp\perp}$	4
23	$(G \cap F^{\perp} \cap G^{\perp})^{\perp}$	24
24	$(G \cap F^{\perp} \cap G^{\perp})^{\perp\perp}$	23

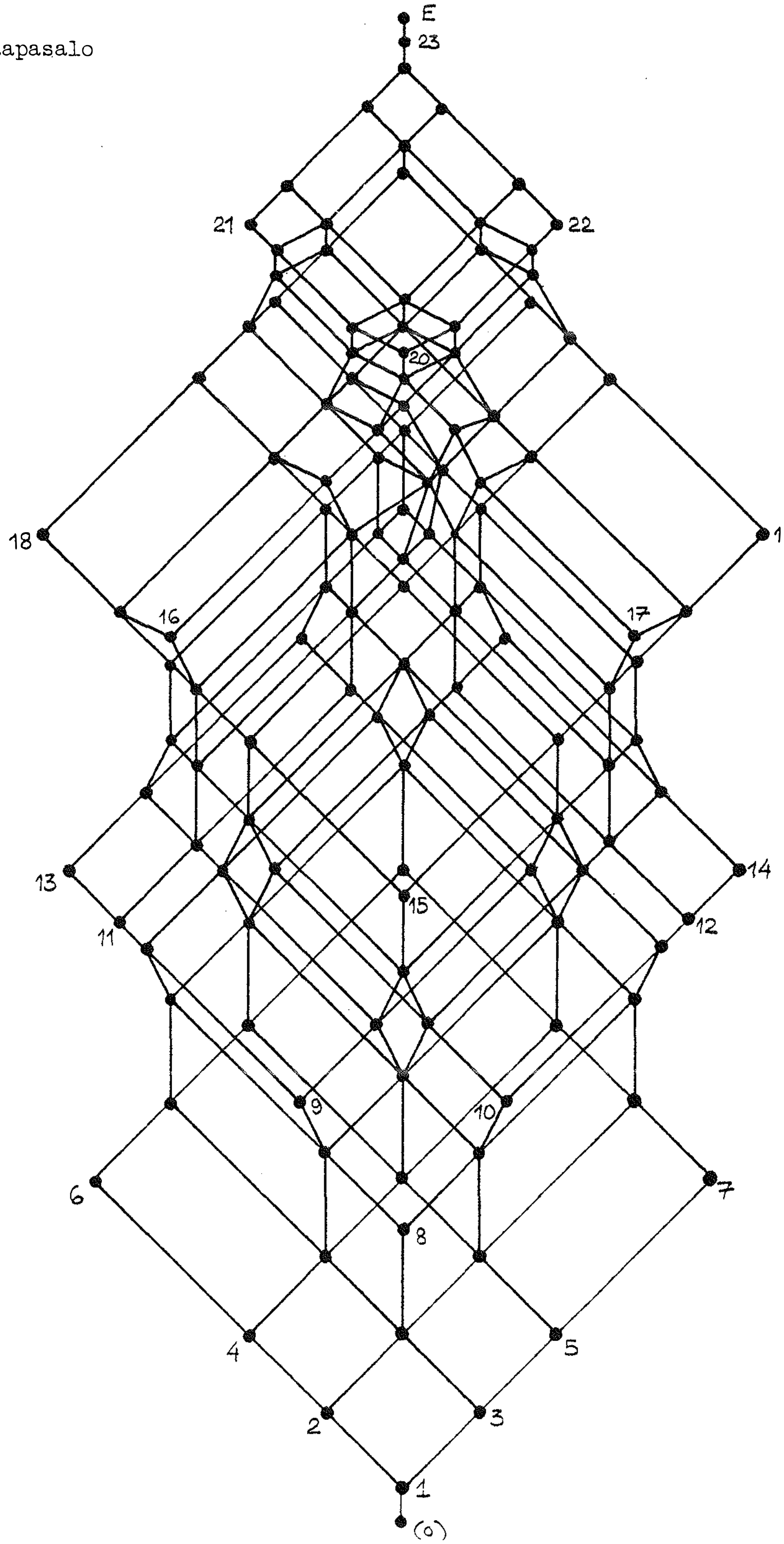


Diagramm 8. $V_{133}(F, G)$ (Satz 3.9, S. 40; s. Tab. 6, S. 76).

Tabelle 6. Die irreduziblen Elemente in Diagramm 8.

Nr.	B	$B^{\perp}$
1	$F^{\perp} \cap G^{\perp}$	23
2	$F \cap F^{\perp}$	q
3	$G \cap G^{\perp}$	q
4	$F^{\perp\perp} \cap F^{\perp}$	22
5	$G^{\perp\perp} \cap G^{\perp}$	21
6	$F^{\perp}$	19
7	$G^{\perp}$	18
8	$F \cap G$	q
9	$F^{\perp\perp} \cap G$	6+7
10	$F \cap G^{\perp\perp}$	6+7
11	$G \cap (F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp}$	4+7
12	$F \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	5+6
13	G	7
14	F	6
15	$F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$	6+7
16	$G^{\perp\perp} \cap (F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp}$	4+7
17	$F^{\perp\perp} \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	5+6
18	$G^{\perp\perp}$	7
19	$F^{\perp\perp}$	6
20	$(F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	4+5
21	$(G^{\perp\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	5
22	$(F^{\perp\perp} + F^{\perp})^{\perp\perp}$	4
23	$(F + G)^{\perp\perp}$	1

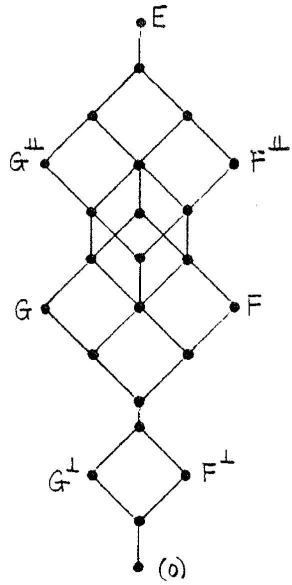


Diagramm 9. $V_{24}(F, G)$ (s. S. 41).

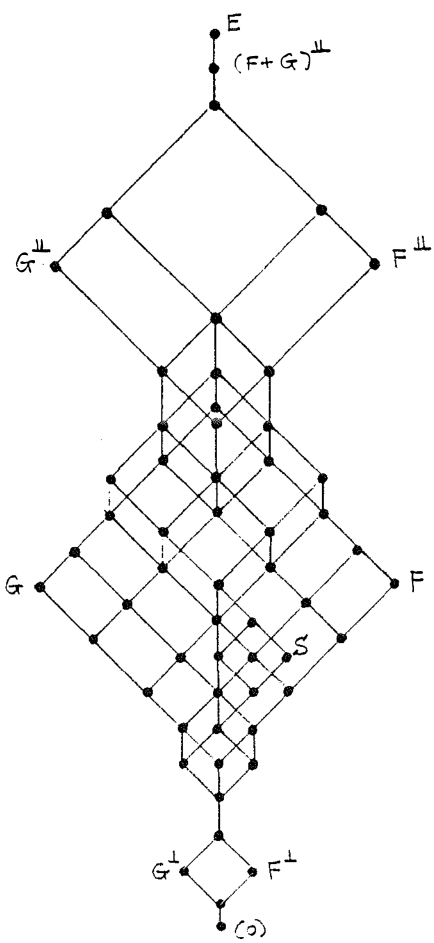


Diagramm 10. $V_{58}(F, G)$ (s. S. 41).

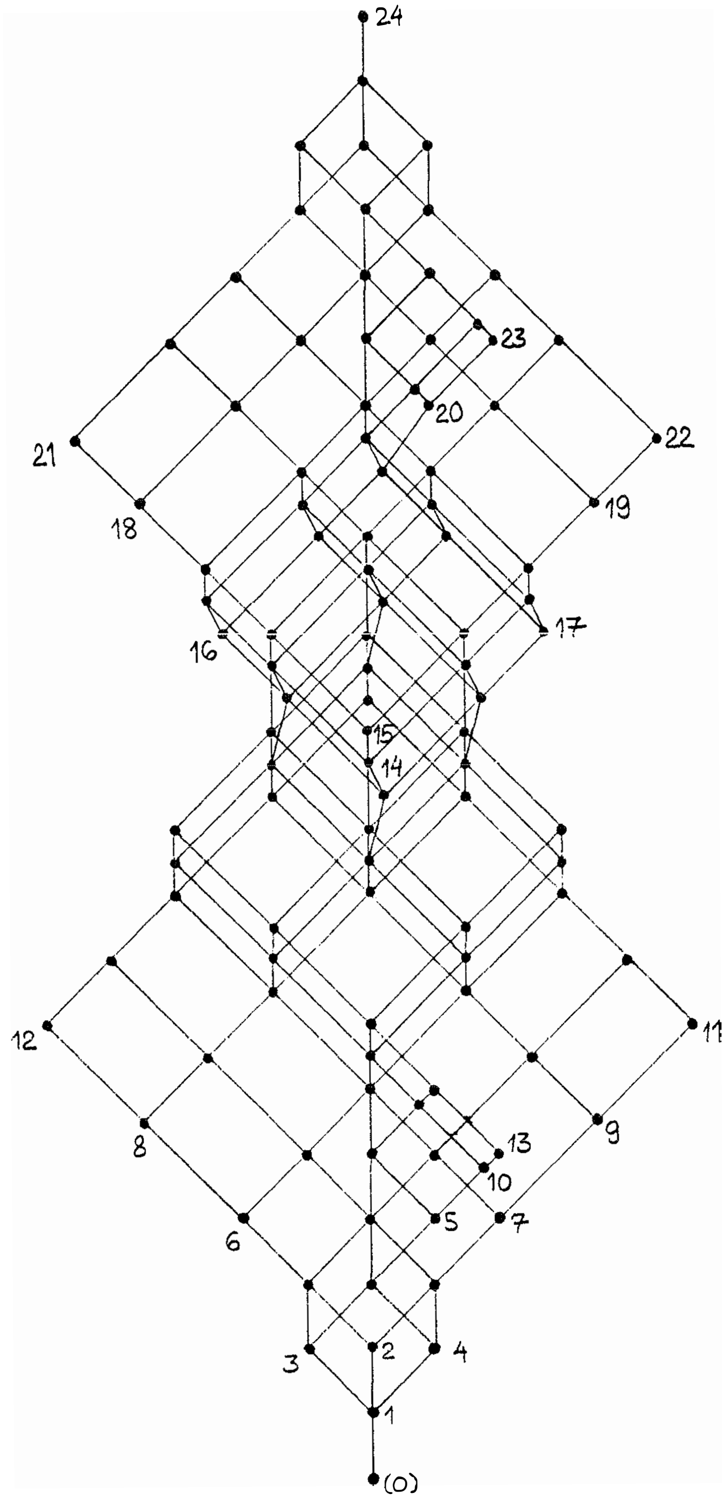


Diagramm 11. $V_{108}{}^{I}(F\,,G)$ (Satz 3.11, S. 45; s. Tab. 7, S. 78-79).

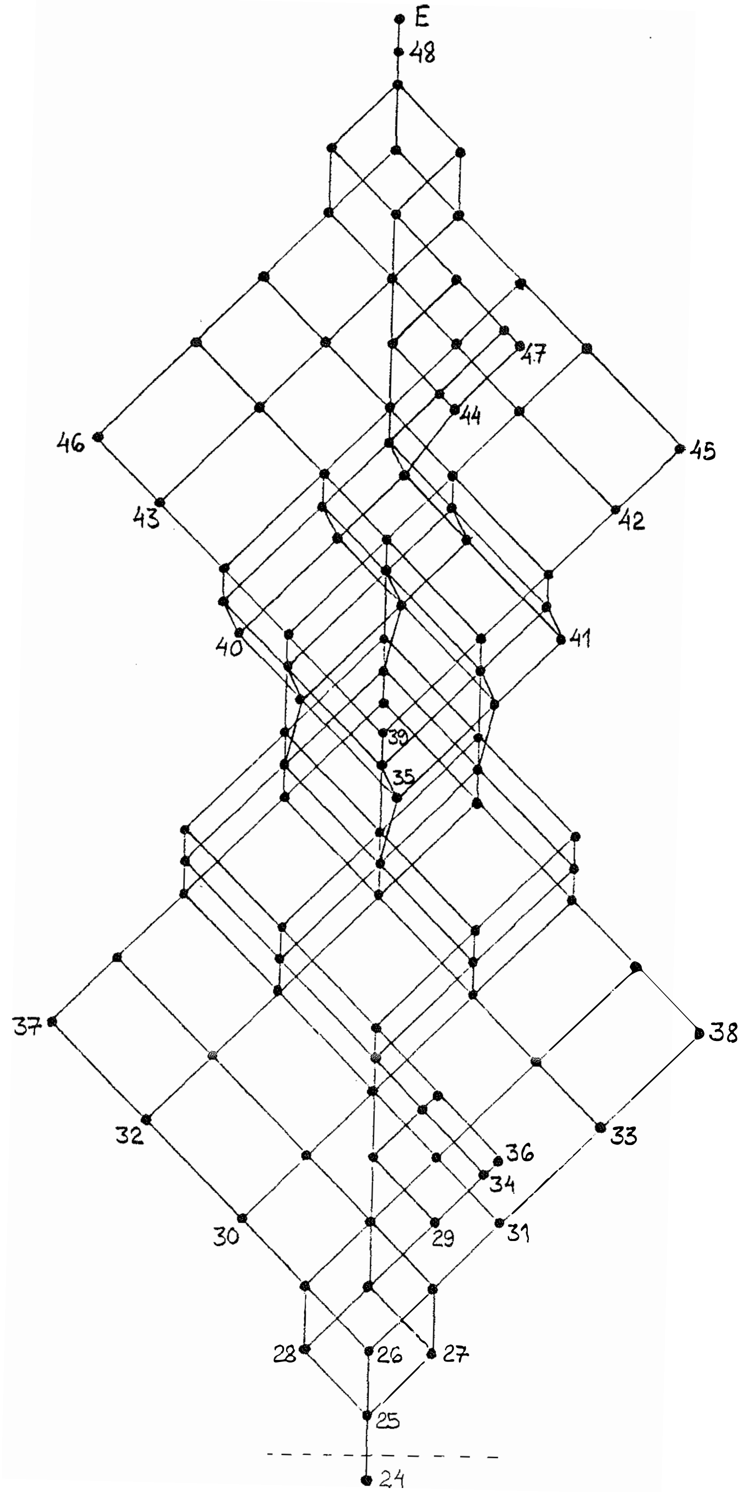


Diagramm 12. $V_{108}{}^{II}(F^{\perp}, G^{\perp})$ (Satz 3.11, S. 45; s. Tab. 7, S. 78-79).

T a b e l l e 7. Die irreduziblen Elemente von V_{216} in den Diagrammen 11 und 12.

Nr.	B	$B^{\perp}$
1	$F \cap G \cap H$	48
2	$F \cap G$	47
3	$F \cap H$	46
4	$G \cap H$	45
5	$(F+G) \cap H$	qq
6	$F \cap (G+H)$	qq
7	$G \cap (F+H)$	qq
8	$F \cap (G+H)^{\perp\perp}$	27+37
9	$G \cap (F+H)^{\perp\perp}$	28+38
10	$H \cap (F+G)^{\perp\perp}$	26+36
11	G	38
12	F	37
13	H	36
14	$(F+H)^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp}$	35
15	$(F+H)^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp}$	34
16	$(F+H)^{\perp\perp} \cap (F+G)^{\perp\perp}$	33
17	$(F+G)^{\perp\perp} \cap (G+H)^{\perp\perp}$	32
18	$(F+H)^{\perp\perp} \cap ((F+G)^{\perp\perp} + (G+H)^{\perp\perp})$	qq
19	$(G+H)^{\perp\perp} \cap ((F+G)^{\perp\perp} + (F+H)^{\perp\perp})$	qq
20	$(F+G)^{\perp\perp} \cap ((F+H)^{\perp\perp} + (G+H)^{\perp\perp})$	qq
21	$(F+H)^{\perp\perp}$	28
22	$(G+H)^{\perp\perp}$	27
23	$(F+G)^{\perp\perp}$	26
24	$(F+G+H)^{\perp\perp}$	25
25	$F^{\perp} \cap G^{\perp} \cap H^{\perp}$	24
26	$F^{\perp} \cap G^{\perp}$	23
27	$G^{\perp} \cap H^{\perp}$	22
28	$F^{\perp} \cap H^{\perp}$	21
29	$H^{\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$	qq
30	$F^{\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})$	qq
31	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + H^{\perp})$	qq

Wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Nr.	B	$B^{\perp}$
32	$F^{\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	4+12
33	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	3+11
34	$H^{\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	2+13
35	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+3+4
36	$H^{\perp}$	13
37	$F^{\perp}$	12
38	$G^{\perp}$	11
39	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	3+4
40	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	2+3
41	$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+4
42	$(G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} + (F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
43	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} + (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
44	$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} + (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
45	$(G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	4
46	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	3
47	$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	2
48	$(F^{\perp} + G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	1

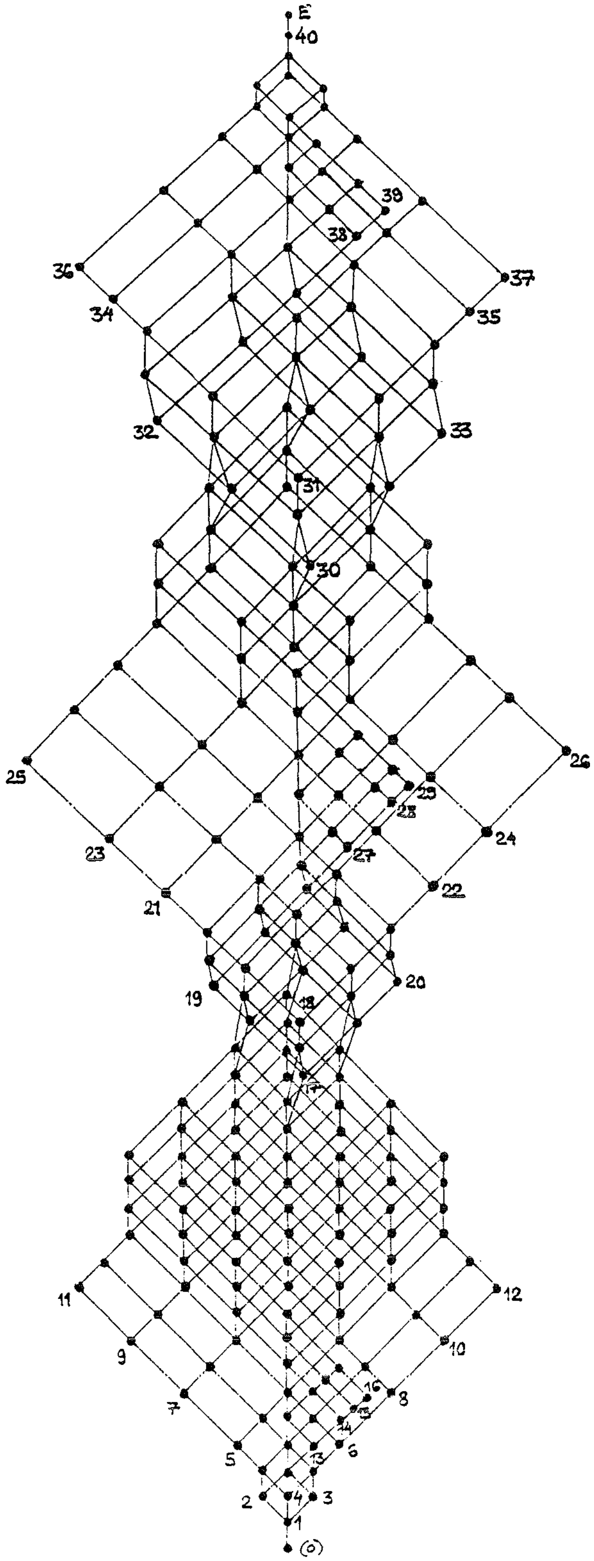


Diagramm 13. V_{233}(F , G , H) (Satz 3.12, S. 46; s. Tab. 8, S. 83-84).

Tabelle 8. Die irreduziblen Elemente in Diagramm 13.

Nr.	B	$B^{\perp}$
1	$F \cap G \cap H$	40
2	$F \cap H$	37
3	$G \cap H$	36
4	$F \cap G$	39
5	$F \cap (G + H)$	qq
6	$G \cap (F + H)$	qq
7	$F \cap (G + H)^{\perp\perp}$	19+26
8	$G \cap (F + H)^{\perp\perp}$	20+25
9	$F \cap F^{\perp}$	11+26
10	$G \cap G^{\perp}$	12+25
11	F	26
12	G	25
13	$H \cap (F + G)$	qq
14	$H \cap (F + G)^{\perp\perp}$	18+29
15	$H \cap H^{\perp}$	16+29
16	H	29
17	$F^{\perp} \cap G^{\perp} \cap H^{\perp}$	11+12+16
18	$F^{\perp} \cap G^{\perp}$	11+12+14
19	$G^{\perp} \cap H^{\perp}$	7+12+16
20	$F^{\perp} \cap H^{\perp}$	8+11+16
21	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + H^{\perp})$	qq
22	$F^{\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})$	qq
23	$G^{\perp} \cap (F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+12
24	$F^{\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	3+11
25	$G^{\perp}$	12
26	$F^{\perp}$	11
27	$H^{\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})$	qq
28	$H^{\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	4+16
29	$H^{\perp}$	16
30	$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+3+4
31	$(F^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+3
32	$(G^{\perp} + H^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp}$	3+4

Wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Nr.	B	$B^{\perp}$
33	$(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} \cap (F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp}$	2+4
34	$(G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} + (F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
35	$(F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} + (G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
36	$(G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp}$	3
37	$(F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp}$	2
38	$(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} \cap ((F^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp} + (G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp})$	qq
39	$(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp}$	4
40	$(F^{\perp}+G^{\perp}+H^{\perp})^{\perp\perp}$	1

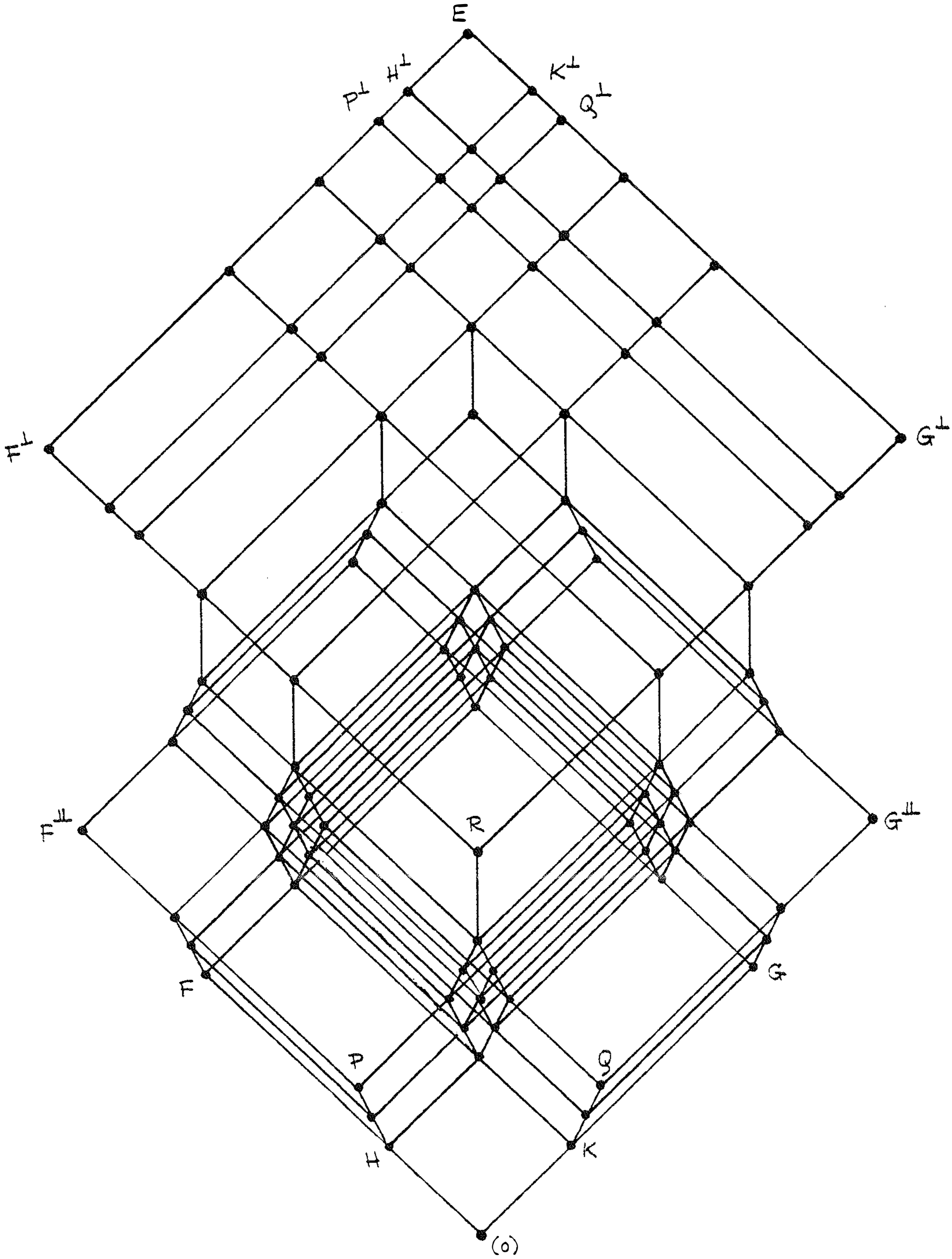


Diagramm 14. Der Brandsche Verband $V_{100}(F, G)$, orthostabil.

Literatur

[1] Bäni, W.: Applications of the lattice method to infinite dimensional hermitian spaces (subspaces in hermitian spaces of countable dimension). - Habilitationsarbeit 84, Universität Zürich, 1980.

[2] Birkhoff, G.: Lattice theory. - American Mathematical Society Colloquium Publications XXV (Third Edition, Second Printing), Providence, R.I., 1973.

[3] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique XXIV. Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Actual. Scient. Ind. 1272. Hermann, Paris, 1959.

[4] Brand, L.: Erweiterung von algebraischen Isometrien in sesquilinearen Räumen. - Inaugural-Dissertation, Universität Zürich. Juris Druck -Verlag, Zürich, 1974.

[5] Dieudonné, J.: La géométrie des groupes classiques. - Ergebnisse der Mathematik N. F. 5. Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1963.

[6] Gross, H.: On Witt's theorem in the denumerably infinite case, II. - Math. Ann. 170, 1967, S. 145-165.

[7] -"- Isomorphisms between lattices of linear subspaces which are induced by isometries. - J. Algebra 49, 1977, S. 537-546.

[8] -"- Quadratic forms in infinite dimensional vector spaces. - Progress in Mathematics 1. Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart, 1979.

[9] Gross, H., and H.R. Fischer: Quadratic forms and linear topologies, I. - Math. Ann. 157, 1964, S. 296-325.

[10] Kaplansky, I.: Forms in infinite-dimensional spaces. - An. Acad. Brasil. Ciênc. 22, 1950, S. 1-17.

[11] Witt, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. - J. Reine Angew. Math. 176, 1937, S. 31-34.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland