

Matemaattisten taitojen kehittyminen alkuopetuksessa – Ensimmäisen luokan laskusujuvuuden ja sanavaraston yhteys kolmannen luokan matemaattisiin taitoihin

ANNETTE UKKOLA¹ JA JARI METSÄMUURONEN²

annette.ukkola@karvi.fi

¹Kansallinen koulutuksen arviointikeskus (KARVI), ²Turun yliopisto, Oppimis-analytiikan tutkimusinstituutti (TRILA)

Tiivistelmä

Peruskoulun aikana oppilaiden matemaattiset taidot kehittyvät vaihtelevasti. Yhdeksännen luokan lopussa oppilaiden välillä on suuria osaamiseroja ja taidoiltaan heikoimmilla oppilailla on puutteita laskusujuvuudessa. Tässä joukossa ovat yliedustettuina pojat ja oppilaat, joilla on heikko kielitaito. On tärkeää tutkia, ilmenevätkö osaamiserot jo vuosiluokilla 1 ja 2 eli alkuopetuksessa.

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, ovatko ensimmäisen luokan alun laskusujuvuus ja sanavarasto yhteydessä matemaattisten taitojen kehitykseen alkuopetuksessa. Lisäksi selvitettiin, onko laskusujuvuuden kehityksessä eroja tytöillä ja pojilla. Aineisto kerättiin 6 875 oppilaalta Suomessa. Analyysissa käytettiin ristiintaulukointia, varianssianalyysia ja regressioanalyysia.

Laskusujuvuuden lähtötaso ennusti voimakkaasti opetussuunnitelman perusteiden sisältöalueiden mukaisia matemaattisia taitoja kolmannen luokan alussa ($\eta^2 = 0,462$, $f = 0,76$). Heikko sanavaraston lähtötaso ennusti heikompa matemaattisten taitojen kehittymistä alkuopetuksen aikana. Tyttöjen ja poikien taidot kehittivät samaan tahtiin.

Avainsanat

alkuopetus, laskusujuvuus, matemaattiset taidot, sanavarasto

Developing mathematical skills during grades 1 and 2 - The Relationship between arithmetic fluency and vocabulary in the first grade and mathematical skills in the third grade

Abstract

During primary and lower secondary education, pupils' mathematical skills develop at different rates. At the end of grade 9, there are large individual differences in pupils' mathematical skills, and pupils with the lowest skills are lacking in arithmetic fluency. Among these, boys and pupils with low language skills are over-represented. It is important to investigate whether differences in skills emerge already in grades 1 and 2.

The purpose of this study was to investigate whether pupils' arithmetic fluency and vocabulary at the beginning of the first grade predicted their mathematical skills development during grades 1 and 2. We also investigated whether there are differences in the development of arithmetic fluency skills between girls and boys. The data were collected from 6 875 pupils in Finland. Cross tabulation, analysis of variance and regression analysis were used in the analysis.

The starting level of arithmetic fluency strongly predicted mathematical skills in the content areas of the basic education curriculum at the beginning of third grade ($\eta^2 = 0,462$, $f = 0,76$). Weak vocabulary at the start of school predicted poorer mathematical development during the first two years of school. Girls' and boys' skills developed at similar rates.

Keywords

arithmetic fluency, grades 1 and 2, mathematical skills, vocabulary

Johdanto

Lasten ja nuorten matemaattiset taidot kehittyvät Suomessa keskeisesti koulussa opettajan ohjaamana prosessina. Tämän prosessin taustalla oleva asiakirja, Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (POPS) (Opetushallitus, 2014), on lakiin verrattavissa oleva normi, jota kaikkien opettajien tulee opetuksessaan noudattaa. POPS ohjaa koulun toimintaa, opetusta ja oppimista ja määrittää oppimisen tavoitteet ja oppiaineiden keskeiset sisällöt. POPS ei edellytä koulutulokkailta oppiainekohtaisia taitoja eikä aseta arvioinnin kriteereitä matematiikan opetukseen alkuopetusvaiheessa. Ilman kansallista normia, siihen liittyviä arviointikriteereitä ja näihin kytkeytyviä osaamisen tasoja opettajat eri kouluissa saattaisivat opettaa aivan eri asioita ja niitäkin eritasoisesti. Jos opettaja etenee oman oppilasryhmänsä tason mukaan, vaihtelu oppimisen tavoitteiden asettelussa ja arvioinnissa kasvaa (Sawaki, 2016).

Yksilöiden näkökulmasta lähtötilanne on jo peruskoulun alussa epätasainen. Monella lapsella arvioinnin kohteena olevat matemaattiset taidot, kuten lukukäsitteen ymmärtäminen ja laskutaidon sujuvuus, ovat vahvoja jo peruskoulun alussa (Ukkola ym., 2020). Osalla ensimmäisen luokan aloittavista oppilaista oppiaineisiin liittyvät taidot ovat kuitenkin erittäin heikkoja (Mononen ym., 2015; Ukkola ym., 2020).

Varhaisten matemaattisten taitojen kuten lukumääräisyyden tajun, lukujonotaitojen ja suhdetaitojen on toistuvasti osoitettu ennakoivan myöhempiä matemaattisia taitoja (mm. Aunio & Niemivirta, 2010; Aunola ym., 2004; Koponen ym., 2016), ja matematiikka kuvataankin usein kumuloituvana oppiaineena. Toisaalta tiedetään, että perusopetuksen päättövaiheessa osa oppilaista ei osaa kunnolla edes kuudennen vuosiluokan oppisisältöjä (Metsämuuronen, 2023). Matematiikan oppimiseen liittyvät vaikeudet jäävät usein huomaamatta ensimmäisen kouluvuoden aikana (Hannula & Lepola, 2006), ja oppiaineen kumuloituvien tavoitteiden takia alkuopetuksen aikana jääneet osaamisvajheet kertautuvat myöhemmillä vuosiluokilla. Perusopetuksen lopussa taidoiltaan heikoimmilla oppilailla on suuria puutteita laskusujuvuudessa (Metsämuuronen, 2023).

Varhaiset matemaattiset taidot, kuten lukujonotaidot, ovat luonteeltaan kielellisiä (Koponen ym., 2019; Santos ym., 2023), ja kielenkäytön on nähty ole-

van tärkeää erityisesti matematiikan perustaitojen rakentumiselle (Peng ym., 2020). Matemaattista ja kielellistä kyvykkyyttä yhdistävinä tekijöinä on pidetty esimerkiksi nimeämisnopeutta (Hoff ym., 2023; Koponen ym., 2016), mikä puolestaan vaatii riittävää sanavarastoa. Jotta laskusujuvuuden ja siten matemaattisten taitojen eroihin voidaan puuttua ajoissa, on tärkeää tutkia oppilaiden taitojen kehittymistä jo perusopetuksen alkuvaiheessa.

Tässä tutkimuksessa selvitetään laajan kansallisen aineiston perusteella matemaattisten taitojen kehittymistä alkuopetusvaiheessa. Keskeisinä kysymyksinä on, tasaako matematiikan opetus oppilaiden taitoeroja ja syntyvätkö erot laskusujuvuudessa jo alkuopetuksen aikana. Matemaattisten taitojen kokonaisosaamista pyritään selittämään ensimmäisen luokan laskusujuvuudella ja sanavarastolla. Näihin liittyvää kirjallisuutta käsitellään tuonnempana.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat eivät osallistuneet erityiseen standardoituun ohjelmaan, vaan he saivat kaksi vuotta opettajiensa opetusta, jonka pitäisi olla POPS:n mukaista. Käytetty aineisto edustaa kokonaista ikäluokkaa. Aiempia suomalaistutkimuksia laajempi aineisto mahdollistaa sen, että voidaan tunnistaa oppilaiden välisiä kehittymisen eroja ja löytää oppimiseen yhteydessä olevia tekijöitä, jotka eivät näy pienillä otoksilla. Tarkastelu aloitetaan pohtimalla matemaattisten taitojen kehittymistä, ja sen jälkeen esitellään aineisto, käytetyt menetelmät ja tutkimuksen tulokset.

Matemaattisten taitojen kehittyminen perusopetuksen aikana

Keskeiset matemaattiset taidot alkuopetusvaiheessa voidaan jakaa neljään kokonaisuuteen, jotka ovat lukumääräisyyden taju, laskemisen taidot, matemaattisten suhteiden hallinta ja aritmeettiset perustaidot (Aunio & Räsänen, 2015). POPS:ssa nämä taidot luokitellaan lukujen ja laskutoimitusten sisältöalueelle (Opetushallitus, 2014). Juuri näillä taidoilla voidaan ennustaa myöhempiä matemaattisia taitoja (Aunio & Niemivirta, 2010).

Matemaattiset taidot alkavat kehittyä jo ennen kouluikää, sillä matemaattisen ajattelun perustaa luodaan varhaislapsuudesta lähtien. Koulussa opeteltavat matemaattiset taidot, joita opettajien tulee opettaa, jaetaan, POPS:n mukaan

alkuopetusvaiheessa 1) ajattelun taitoihin, 2) lukuihin ja laskutoimituksiin, 3) geometriaan ja mittaamiseen ja 4) tietojen käsittelyyn ja tilastoihin. Näiden alueiden taidot rakentuvat useista osataidoista, joissa uudet tiedot ja taidot perustuvat aiemmin opittuun (mm. Aunola ym., 2004; Clements ym., 2019). Ensimmäisten kouluvuosien tarkoituksena on kehittää peruslaskutoimitusten hallintaa ja laskusujuvuutta (Opetushallitus, 2014). Peruskoulun päättövaiheessa tarvittavia taitoja pohjustetaan jo alkuopetuksessa: yhteenlaskua tarvitaan kertolaskun hallinnassa, ja kertolaskuja taas tarvitaan myöhemmillä vuosiluokilla muun muassa potenssilaskennassa. Alempien vuosiluokkien osaaminen on siis olennaista myöhemmissä opinnoissa.

Osaamisen kumuloituvuuden takia matemaattisten taitojen kehittämisessä on nähty Matteus-vaikutusta: Taitojen kehittyminen on keskimäärin voimakkaampaa niillä lapsilla, joiden matemaattiset taidot ovat jo lähtötilanteessa hyvät (Korpiää ym., 2020; Väisänen & Aunio, 2016). Toisaalta kansallisissa arvioinneissa on havaittu, että perusopetuksen lopussa heikoimmin matematiikassa pärjäävät oppilaat ovat keskimäärin kolme vuosiluokkaa jäljessä keskitasoisia oppilaita (Metsämuuronen, 2023). Yksilöiden väliset osaamiserot ovatkin suuria yhdeksännen luokan lopussa (Metsämuuronen & Nousiainen, 2021).

Taitojen kehittämisessä on nähty eroja paitsi yksilöiden, myös oppilasryhmien välillä. Kiintoisia eroja on löydetty myös tyttöjen ja poikien välillä. Poikien joukossa nähdään usein suurempaa yksilöllistä vaihtelua kuin tytöillä (esim. O’Dea ym., 2018). Alkuopetusvaiheesta on havaittu, että erityisesti edistyneiden oppilaiden joukossa poikien taidot kehittyvät nopeammin kuin tyttöjen (Aunola ym., 2004). Suomessa poikia on todettu olevan enemmän kuin tyttöjä sekä matemaattisilta taidoiltaan parhaiden (Vettenranta ym., 2020; Hiltunen ym., 2023) että heikoimpien joukossa (Metsämuuronen, 2023). Keskimääräisissä taidoissa ei kuitenkaan ole havaittu merkittäviä eroja tyttöjen ja poikien välillä perusopetuksen aikana (Ukkola ym., 2020; Ukkola & Metsämuuronen, 2023; Metsämuuronen & Nousiainen, 2021).

Matemaattisten taitojen kehityksessä kielelliset taidot ovat oleellisia (Peng ym., 2020; Ufer & Bochnik, 2020; Susperreguy ym., 2024). Varhaiset matemaattiset taidot ovat luonteeltaan kielellisiä: pienillä lapsilla esimerkiksi vertailu ja luokittelu perustuvat sanastoon, ja monet lapset laskevat yhteen- ja vähennyslask-

kuja lukujonoja suullisesti luetellen ennen laskemisen prosessin automatisoitumista (Koponen ym., 2019; Santos ym., 2023). Myöhemminä kouluvuosina looginen ja täsmällinen matemaattinen ajattelu, kyky ilmaista matemaattista ajattelua ja kyky käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia vaativat monipuolista sanavarastoa ja matemaattisten käsitteiden tuntemusta (ks. Joutsenlahti & Tossavainen, 2018; Purpura ym., 2011). Matemaattisesti taitavista oppilaista suuri osa onkin myös kielellisesti taitavia, ja valtaosalla lapsista kielelliset taidot ja laskutaidot vaihtelevat yhdessä (Korpiää ym., 2020).

Laskemisen prosessin automatisoitumisessa keskeistä on laskusujuvuus. Laskusujuvuudella tarkoitetaan usein sitä, kuinka nopeasti oikea vastaus tuotetaan (Petrill ym., 2012). Laskusujuvuus edellyttää lukukäsitteen vahvaa hallintaa, kymmenjärjestelmän ymmärtämistä, lukujonotaitoja ja matemaattista ajattelua, joita systemaattisesti harjoitellaan alimmilla vuosiluokilla. Kun yksinkertaiset ja toistuvat yhdistelmät automatisoituvat, laskeminen nopeutuu. Laskusujuvuutta voidaan arvioida nopeuden sijaan myös virheiden laadun tai oikeiden vastausten määrän perusteella (ks. Hakkarainen ym., 2014; Räsänen ym., 2021; Metsämuuronen, 2023) kuten tässä tutkimuksessa. Perusopetuksen lopussa taidoiltaan heikoimmilla oppilailla on puutteita erityisesti laskusujuvuudessa (Metsämuuronen 2023). Tähän joukkoon kuuluu enemmän poikia kuin tyttöjä. Ei kuitenkaan tiedetä, syntyvätkö erot jo alkuopetuksen aikana. Matemaattisten taitojen kehitystä alkuopetusvaiheessa on Suomessa tutkittu usein melko pienillä otoksilla (esim. Aunola ym., 2004; Hannula & Lepola, 2006; Väisänen & Aunio, 2016). Lisäksi on vain vähän tietoa siitä, miten sanavarasto on yhteydessä oppilaiden matemaattisten taitojen kehitykseen alkuopetuksen aikana yleisopetuksen oppilailla. Tässä tutkimuksessa saadaan tietoa tästä oppilasryhmästä kansallisesti suuren otoksen perusteella.

Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, ovatko ensimmäisen luokan alussa mitattu laskusujuvuus ja sanavarasto yhteydessä matemaattisiin taitoihin kolmannen luokan alussa. Tutkimuksessa vastataan seuraaviin kysymyksiin:

1. Missä määrin ensimmäisen luokan alun laskusujuvuus ja sanavarasto ennustavat matemaattisten taitojen kehitystä alkuopetuksen aikana?
2. Millaisia eroja laskusujuvuuden kehityksessä on tytöillä ja pojilla?

Menetelmät

Aineisto

Aineistona käytettiin kansallisten perusopetuksen oppimistulosten arviointien aineistoja (ks. Ukkola & Metsämuuronen, 2023). Oppilaiden matematiikan ja äidinkielen taitoja arvioitiin tehtäväsarjalla ensimmäisen ja kolmannen luokan alussa vuosina 2018 ja 2020. Kummassakin tehtäväsarjassa oli 115 osiota. Tehtävät oli suunniteltu POPS:n (Opetushallitus, 2014) tavoitteiden ja sisältöalueiden mukaisesti. Oppilaiden suoriutumista tehtävissä mitattiin oikeiden vastausten määrällä. Tehtävissä ei ollut aikapainetta.

Kaikista matematiikan oppiaineeseen liittyvistä tehtävistä muodostettiin matemaattisten taitojen summamuuttujat sekä ensimmäisen että kolmannen luokan aineistoista (Taulukko 1). Näiden mittareiden tehtävät edustivat POPS:n eri sisältöalueita, myös lukujen ja laskutoimitusten aluetta. Lisäksi muodostettiin summamuuttujina laskusujuvuuden ja sanavaraston mittarit.

Laskusujuvuuden mittari sisälsi POPS:n lukujen ja laskutoimitusten sisältöalueen mukaiset osiot ja elementtejä myös esiopetuksen opetussuunnitelman perusteista. Näissä tehtävissä mitattiin lukumäärien ja lukujen tunnistamista, lukujonotaitoja ja suhdetaitoja lukualueella 0–1 000 ja peruslaskutoimitusten hallintaa lukualueella 0–100. Lisäksi mukana oli vuosiluokkien 3–6 tavoitteita vastaavia tehtäviä.

Sanavaraston mittari sisälsi yksinkertaista arkeen ja koulunkäyntiin liittyvää sanastoa, kuten suuntaan, sijaintiin ja vertailuun liittyviä adverbeja ja adjektiiveja sekä yleisiä substantiiveja, joihin kuului ylä- ja alakäsitteitä. Lisäksi mittariin kuului matematiikan ja äidinkielen ja kirjallisuuden oppiaineiden käsitteitä, jotka mainitaan POPS:ssa vuosiluokkien 1–2 kohdalla.

Taulukko 1. Mittareiden maksimipisteet ja osioiden sisällöt

Mittari	Maksimipisteet	Osioiden sisältö
Matemaattiset taidot, 1. lk.	62	ajattelun taidot, luvut ja las- kutoimitukset, geometria ja mittaaminen, tietojenkäsittely ja tilastot
Matemaattiset taidot, 3. lk.	77	ajattelun taidot, luvut ja las- kutoimitukset, geometria ja mittaaminen, tietojenkäsittely ja tilastot
Laskusujuvuus, 1. lk.	25	lukumäärien tunnistaminen, lukujen tunnistaminen, lukujonotaidot, suhdetaidot, yhteen- ja vähennyslasku
Laskusujuvuus, 3. lk.	43	lukujen tunnistaminen, suh- detaidot, yhteen- ja vähennys- lasku, kerto- ja jakolasku
Sanavarasto, 1. lk.	50	suunta, sijainti, vertailu, ylä- ja alakäsitteet, POPS:n käsitteet vuosiluokilta 1 ja 2

Mittareiden reliabiliteetit olivat korkeita niin matemaattisten taitojen mitta-
reilla ensimmäisellä ($\alpha = 0,879$, deflaatiokorjattuna $\alpha_D = 0,940$; ks. mm. Met-
sämuruonen, 2022)¹ ja kolmannella luokalla ($\alpha = 0,939$, $\alpha_D = 0,967$) kuin en-
simmäisen luokan laskusujuvuuden ($\alpha = 0,826$ ja $\alpha_D = 0,912$) ja sanavaraston
mittareilla ($\alpha = 0,852$, $\alpha_D = 0,918$).

Analyysiin otettiin mukaan ne oppilaat, joilla ei ollut erityisen tuen päätöstä
ensimmäisellä eikä kolmannella luokalla ja joiden äidinkielen ja kirjallisuus-

¹ Deflaatiokorjauksessa on käytetty Somersin deltaa tulomomenttikorrelaatiokertoimen
sijaan.

den oppimäärä oli molemmilla luokilla suomen kieli ja kirjallisuus tai svenska och litteratur. Toisen kielen oppimääriä opiskelevat oppilaat jätettiin analyysin ulkopuolelle, koska nämä oppimäärät on tarkoitettu sellaisille oppilaille, joilla on lähtökohtaisesti puutteita koulun opetuskielen hallinnassa kielen jollakin osa-alueella. Vaikka näillä oppilailla ei olisi matemaattisia vaikeuksia, oppimäärän mukaan ottaminen sekoittaisi tulosten tulkintaa, sillä testit tehtiin näille oppilaille vieraalla kielellä. Kansallisten ja kansainvälisten arviointien perusteella tiedetään, että nämä oppilaat osoittavat keskimäärin muita heikompaa osaamista matematiikassa ja lukutaidossa. Sen sijaan suomen- ja ruotsinkielisten oppilaiden sanavaraston yhteydestä matematiikan taitoihin on vain vähän tietoa. Näiden rajausten jälkeen lopulliseen aineistoon kuului 6 875 oppilasta. Oppimäärä- ja tukitiedot saatiin rekisteritietona Opetushallituksen Koski-tietopalvelusta.

Kunkin oppilaan sukupuoli luokiteltiin etunimen perusteella Digi- ja väestötietoviraston Nimipalvelun tilastojen mukaan. Tyttöjä oli aineistossa 51 prosenttia ja poikia 49 prosenttia. Oppilaista 87 prosenttia oli suomenkielisistä ja 13 prosenttia ruotsinkielisistä kouluista.

Otos oli kansallisesti kattava. Se edusti eri aluehallintovirastojen alueita, Tilastokeskuksen luokituksen kuntaryhmiä (kaupunkimaiset, taajaan asutut ja maaseutumaisia kunnat) ja pieniä ja suuria kouluja. Ruotsinkieliset koulut oli yliotostettu, jotta tulokset ovat luotettavia niin suomen- kuin ruotsinkielisen opetuksen osalta.

Analyysimenetelmät

Aineistoista poistettiin oppilaat, joilta saatiin pelkästään taustatietoja tai harjoitustehtävien suorituksia. Jos sama oppilas oli tehnyt tehtäviä kahdesti, suoritukset yhdistettiin niin, että enemmän vastauksia sisältänyttä aineistoriviä täydennettiin toisen aineistorivin vastauksilla. Tasatilanteessa vastausriveistä valittiin ensimmäinen.

Aineistot vertaistettiin, eli niiden pistemäärät muunnettiin yhteismitallisiksi osiovasteteoriaan (Item Response Theory) perustuvalla IRT-mallituksella (Lord ym., 1968) kumpaankin tehtäväsarjaan kuuluneiden ankkuritehtävien

avulla. Aineistojen vertaistus tehtiin kolmannen luokan aineistossa ensimmäisen luokan aineistosta riippumatta, ja ensimmäinen mittaus vertaistettiin vastaamaan kolmannen luokan tasoa.

Jos oppilaan kehitys määriteltiin epäloogiseksi eli esimerkiksi negatiiviseksi, mallinnettiin kolmannen luokan tulos uudestaan ensimmäisen luokan suoritusten perusteella. Samassa yhteydessä mallinnettiin myös lähtötason puuttuvia tietoja, joten analyysiin saatiin mukaan aiempaa suurempi määrä oppilaiden tuloksia. Kolmannen luokan keskiarvoksi muodostui 518 pistettä, T10-asteikolla, joka vaihtelee noin välillä 0–1 000, ja keskihajonnaksi 86,6 pistettä.

Oppilaat jaettiin kymmenyksiin ensimmäisen luokan alun laskusujuvuuden ja sanavaraston mukaan sekä kolmannen luokan matemaattisten taitojen ja laskusujuvuuden mukaan. Aineiston analysoinnissa käytettiin ristiintaulukointia osaamiskymmenysten vertailuun ja varianssianalyysia ja regressioanalyysia tyttöjen ja poikien välisen eron selittämiseen. Lisäksi käytettiin Cramerin V:tä järjestysasteikollisille muuttujille ja Pearsonin korrelaatiokerrointa jatkuville muuttujille. Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen vastaamisessa käytettiin laskusujuvuuden ja sanavaraston mittareita ensimmäiseltä vuosiluokalta ja matemaattisten taitojen mittareita ensimmäiseltä ja kolmannelta luokalta. Toiseen tutkimuskysymykseen vastaamisessa käytettiin laskusujuvuuden mittareita ensimmäiseltä ja kolmannelta luokalta.

Tulokset

Tässä luvussa esitetään tulokset ensimmäisen luokan laskusujuvuuden yhteydestä kolmannen luokan matemaattisiin taitoihin ja laskusujuvuuden kehityksestä osaamiskymmenyksittäin. Sen jälkeen esitetään tulokset ensimmäisen luokan sanavaraston yhteydestä kolmannen luokan matemaattisiin taitoihin. Lopuksi verrataan laskusujuvuuden kehitystä alkuopetuksessa tytöillä ja pojilla.

Ensimmäisen luokan laskusujuvuuden yhteys kolmannen luokan matemaattisiin taitoihin

Taulukossa 2 esitetään oppilaiden matemaattisten taitojen pistemäärät kolmannen luokan alussa laskusujuvuuden lähtötason mukaan. Matemaattiset taidot kolmannen luokan alussa olivat yhteydessä laskusujuvuuden lähtötasoon ensimmäisen luokan alussa. Mitä parempi laskusujuvuuden lähtötaso oli, sitä paremmat matemaattiset taidot olivat kolmannen luokan alussa.

Taulukko 2. Matemaattiset taidot 3. luokan alussa laskusujuvuuden lähtötason kymmenysten mukaan

	<i>keskiarvo 3. lk. (1. lk.)</i>	<i>frekvenssi</i>	<i>keskihajonta</i>
Alin kymmenys	430 (249)	693	79
2. kymmenys	452 (289)	658	67
3. kymmenys	471 (307)	785	65
4. kymmenys	483 (329)	621	59
5. kymmenys	504 (348)	661	57
6. kymmenys	522 (364)	689	61
7. kymmenys	539 (376)	633	59
8. kymmenys	557 (402)	785	61
9. kymmenys	590 (429)	616	62
Ylin kymmenys	625 (486)	734	63

$$F(9,6866) = 654,998, df = 9, p < 0,001, \eta^2 = 0,462, f = 0,76$$

Ensimmäisen luokan alimmasta kymmenyksestä (*ka.* = 249) lähteneet oppilaat ylsivät kolmannen luokan alussa matemaattisissa taidoissa keskimäärin sille tasolle, jolla toiseksi ylin kymmenys (*ka.* = 429) aloitti koulunkäynnin (Taulukko 2). Tällä tasolla oppilaat osasivat laskea yhteen- ja vähennyslaskuja lukualueella 0–100, ja heillä oli hyvä ymmärrys kymmenjärjestelmästä. Tämä vastaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden tasoa. Ylimpien kymmenysten oppilaat taas osoittivat kolmannen luokan alussa huomattavasti tätä monipuolisempaa osaamista (*ka.* = 625). He esimerkiksi

hallitsivat jakolaskun pienillä luvuilla, osasivat päätellä yhtälöiden ratkaisuja ja ymmärsivät myös todennäköisyyksiä (ks. Ukkola & Metsämuuronen, 2023).

Laskusujuvuudessa oli havaittavissa myös pysyvyyttä (Taulukko 3). Taulukon rivit kuvaavat lähtötason kymmenyksiä ensimmäisen luokan alussa ja sarakkeet osaamiskymmenyksiä kolmannen luokan alussa. Ensimmäisen luokan alimpaan kymmenykseen kuuluneista oppilaista 28 prosenttia oli kolmannen luokan alussa edelleen alimmassa kymmenyksessä, ja 50 prosenttia ylimmästä kymmenyksestä aloittaneista oppilaista oli edelleen ylimmässä kymmenyksessä.

Taulukko 3. Oppilaiden sijoittuminen laskusujuvuuden osaamiskymmenyksiin 3. luokan alussa laskusujuvuuden lähtötason kymmenysten mukaan

<i>Matemaattisen osaamisen kymmenykset 3. luokalla</i>										
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Alin	145	85	65	41	29	31	13	4	7	5
2.	147	129	111	70	62	48	29	18	8	4
3.	111	127	153	110	101	102	56	45	22	5
4.	47	85	73	101	109	74	48	44	18	12
5.	28	59	75	73	88	104	62	42	30	11
6.	24	60	108	112	117	165	148	164	85	58
7.	8	27	44	55	51	85	89	120	63	37
8.	1	8	27	36	68	77	73	130	145	62
9.	0	4	25	33	49	79	90	119	166	176
Ylin	0	0	8	14	23	55	70	100	185	366

$$\chi^2 = 4006,165, df = 81, \text{Cramerin } V = 0,254, p < 0,001$$

Havainnot painottuvat diagonaalisesti, joten suuri osa oppilaista säilytti alkuopetuksen jälkeen asemansa suhteessa muiden oppilaiden laskusujuvuuteen. Toisaalta nähdään kuitenkin siirtymiä erityisesti heikoimmalta lähtötasolta korkealle osaamistasolle: 73 oppilasta (1 %) kolmesta matalimmasta

kymmenyksestä aloittaneista oppilaista ylsi kolmannen luokan alussa kolmeen ylimpään kymmenykseen.

Taulukossa 4 esitetään matemaattisten taitojen kehityspistemäärät alkuopetuksen ajalta ensimmäisen luokan laskusujuvuuden mukaan. Osaaminen kehittyi alkuopetuksessa keskimäärin eniten niillä oppilailla, joiden laskusujuvuus oli ensimmäisen luokan alussa heikoin. Osaaminen kehittyi keskimäärin vähiten niillä oppilailla, joiden laskusujuvuuden lähtötaso oli korkein ensimmäisen luokan alussa.

Taulukko 4. Matemaattisten taitojen kehitys alkuopetuksessa laskusujuvuuden lähtötason kymmenysten mukaan

	<i>kehityksen keskiarvo</i>	<i>frekvenssi</i>	<i>keskihajonta</i>
Alin kymmenys	196	554	88
2. kymmenys	175	751	69
3. kymmenys	157	583	63
4. kymmenys	162	848	61
5. kymmenys	160	607	59
6. kymmenys	160	710	60
7. kymmenys	161	687	57
8. kymmenys	156	758	60
9. kymmenys	164	643	60
Ylin kymmenys	140	734	62

$$F(9,6866) = 31,225, df = 9, p < 0,001, \eta^2 = 0,039, f = 0,20$$

Vaikka erot osaamiskymmenysten kehityspistemäärissä olivat tilastollisesti merkitseviä, keskimmäisten kymmenysten välillä ei juuri ollut eroa. Erot syntyivätkin osaamisen ääripäissä. On kuitenkin huomattava, että hajonta oli suurinta alimmalla kymmenyksellä. Tällä oppilasryhmällä oli siis eniten yksilöllistä vaihtelua.

Ensimmäisen luokan sanavaraston yhteys kolmannen luokan matemaattisiin taitoihin

Taulukossa 5 esitetään oppilaiden matemaattisten taitojen pistemäärät kolmannen luokan alussa sanavaraston lähtötason mukaan. Vaikka osaaminen kehittyi eniten niillä oppilailla, joiden sanavarasto oli lähtötilanteessa heikoin, nämä oppilaat olivat kolmannen luokan alussa keskimääräisiltä matemaattisilta taidoiltaan edelleen keskitason alapuolella. Sanavaraston ylimmästä kymmenyksestä lähteneet oppilaat taas ylsivät keskimäärin huomattavan korkeisiin pistemääriin.

Taulukko 5. Matemaattiset taidot 3. luokan alussa sanavaraston lähtötason kymmenysten mukaan

	<i>keskiarvo</i>	<i>frekvenssi</i>	<i>keskihajonta</i>
Alin kymmenys	446	710	79
2. kymmenys	459	615	69
3. kymmenys	475	656	72
4. kymmenys	487	679	70
5. kymmenys	499	756	67
6. kymmenys	520	779	67
7. kymmenys	542	547	69
8. kymmenys	555	680	71
9. kymmenys	575	763	69
Ylin kymmenys	612	690	67

$$F(9,6866) = 402,821, df = 9, p < 0,001, \eta^2 = 0,346, f = 0,73$$

Ensimmäisen luokan laskusujuvuus ja sanavarasto olivat yhteydessä toisiinsa. Pearsonin korrelaatiokerroin näille osamittareille oli 0,681 ($p < 0,001$). Lähes kaksi kolmasosaa laskusujuvuudeltaan alimman kymmenyksen oppilaista kuului myös sanavarastoltaan alimpaan (35 %) tai toiseksi alimpaan (31 %) kymmenykseen. Yksikään heistä ei yltänyt sanavarastoltaan kahteen ylimpään kymmenykseen. Sen sijaan sanavarastoltaan kahteen alimpaan kym-

menykseen kuuluneista 13 oppilasta (2 %) ylsi laskusujuvuudeltaan kahteen ylimpään kymmenykseen. Laskusujuvuudeltaan parhaaseen kymmenykseen kuuluneista oppilaista 47 prosenttia kuului myös sanavarastoltaan ylimpään kymmenykseen.

Yhdessä laskusujuvuuden ja sanavaraston lähtötaso selittivätkin kolmannen luokan alun matematiikan osaamisesta 46 prosenttia (kahden muuttujan lineaarinen regressioanalyysi, $R^2 = 0,459$). Laskusujuvuuden lähtötaso selitti osaamisesta valtaosan, 45,7 prosenttia, ja vaikka sanavarasto selitti osaamista merkitsevästi ($p < 0,001$), sen selitysvoima jäi marginaaliseksi laskusujuvuuteen nähden. (laskusujuvuudelle $\beta = 0,480$, $p < 0,001$, sanavarastolle $\beta = 0,258$, $p < 0,001$). Osaamistaso oli kolmannella luokalla korkein (634 pistettä) sellaisilla oppilailla, joilla matematiikan lähtötaso oli ensimmäisen luokan alussa korkea (> 446 pistettä) ja sanavarasto laaja (> 442 pistettä). Vastaavasti osaaminen oli matalinta (430 pistettä) ryhmässä, jossa laskusujuvuuden lähtötaso oli alun perinkin matala (264 pistettä).

Laskusujuvuuden kehitys alkuopetuksessa tytöillä ja pojilla

Samalta lähtötasolta aloittaneiden tyttöjen ja poikien kehityspistemäärissä ei ollut eroa, vaan osaaminen kehittyi heillä yhtä paljon alkuopetuksessa. Kuitenkin tyttöjen ja poikien laskusujuvuuden jakaumat olivat kolmannen luokan alussa hieman erilaisia.

Taulukossa 6 esitetään tyttöjen ja poikien osuudet laskusujuvuuden mukaan jaetuissa kymmenyksissä kolmannen luokan alussa. Tyttöjen osuudet olivat poikien osuuksia suurempia alimmissa kymmenyksissä ja pienempiä vain kahdessa ylimmässä lähtötason kymmenyksessä.

Taulukko 6. Tyttöjen ja poikien osuudet laskusujuvuuden kymmenyksissä 3. luokalla

	Tyttöjä		Poikia		Eron todennäköisyys (binomitesti)
	frekvenssi	%	frekvenssi	%	
Alin kymmenys	369	53	328	47	0,238
2. kymmenys	365	51	349	49	0,599
3. kymmenys	313	53	275	47	0,215
4. kymmenys	358	55	293	45	0,041*
5. kymmenys	354	56	280	44	0,016*
6. kymmenys	322	52	301	48	0,483
7. kymmenys	462	51	452	49	0,733
8. kymmenys	283	51	274	49	0,648
9. kymmenys	348	50	350	50	0,200
Ylin kymmenys	302	45	369	55	0,000*

$\chi^2 = 35,132$, $df = 9$, Cramerin $V = 0,071$, $p < 0,001$

Binomitodennäköisyys kertoo sattuman todennäköisyyden tilanteessa, jossa tyttöjä on 48 % ja poikia 52 %, mikä on heidän osuutensa aineistossa ja mikä myös vastaa tyttöjen ja poikien osuutta populaatiossa. Ylimmässä kymmenyksessä oli poikia tilastollisesti merkitsevästi enemmän ($p < 0,001$) kuin satunnaisessa tilanteessa. Suurin ero tyttöjen ja poikien osuuksissa oli neljännessä ja viidennessä kymmenyksessä. Ylimmän kymmenyksen enemmistö oli poikia, kun taas alimman kymmenyksen enemmistö oli tyttöjä.

Pohdinta

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, missä määrin oppilaan laskusujuvuus ja sanavarasto ensimmäisen luokan alussa ennakoivat matemaattisten taitojen kehitystä alkuopetuksessa. Samalla tutkittiin myös, millaisia eroja matemaattisten taitojen kehityksessä on tytöillä ja pojilla.

Tutkimus antaa tietoa matemaattisten taitojen kehittymisestä ensimmäisten kouluvuosien aikana suhteessa oppilaiden lähtötasoon. Tulokset ovat monilta osin yhteneviä aikaisempien tutkimusten kanssa: aiemmat matemaattiset taidot ennustivat myöhempiä taitoja (Aunola ym., 2004; Koponen ym., 2019; Korpipää ym., 2020), ja matemaattisten taitojen ja sanavaraston välillä havaittiin yhteyksiä (Ufer & Bochnik, 2020). Laskusujuvuus ensimmäisen luokan alussa ennusti voimakkaasti matemaattisia taitoja kolmannen luokan alussa. Lähes puolet (46 %) kolmannen luokan osaamisen vaihtelusta voitiin selittää laskusujuvuuden lähtötasolla. Myös oppilaan sanavarasto ensimmäisen luokan alussa oli yhteydessä matemaattisiin taitoihin alkuopetuksen jälkeen.

Aiemmistä tutkimustuloksista poiketen (Aunola ym., 2004; Korpipää ym., 2020) alkuopetuksen matematiikan opetuksessa ei näiden tulosten perusteella ole selvää Matteus-vaikutusta. Keskimääräinen matemaattisten taitojen kehitys oli matalimmalta lähtötasolta ensimmäisen luokan aloittavilla oppilailla selvästi suurempaa kuin muilla, mikä viittaa siihen, että opettajat onnistuvat varsin hyvin tukemaan suurta osaa heikoimmista lähtökohdista koulunkäynnin aloittavia oppilaita. Vähiten taidot kehittyivät niillä oppilailla, joiden laskusujuvuuden lähtötaso oli korkein. Kyse ei ole kattoefektistä, sillä kolmannen luokan tehtävsarjaan kuului myös vuosiluokkien 3–6 tehtäviä eikä yksikään oppilas osannut kaikkia tehtäviä. Vähäisimmästä kehityksestä huolimatta nämä oppilaat ylsivät POPS:n tavoitteisiin nähden erinomaisiin tuloksiin.

Tämän tutkimuksen mukaan matemaattisten taitojen kehittymiselle saadaan pääosin luotua hyvä pohja alkuopetuksessa. Laskusujuvuudeltaan matalimmalta tasolta aloittavat oppilaatkin oppivat POPS:n määrittämiä sisältöjä keskimäärin hyvin. Oppilaiden taidot vaihtelevat kuitenkin suuresti jo alkuopetuksen jälkeen, kuten myöhemmilläkin vuosiluokilla (Vettenranta ym., 2020; Metsämuuronen & Nousiainen, 2021), ja on huomattava, että matalimman lähtötason oppilailla oli eniten hajontaa kehityksessä. Heistä osalla siis taidot

kehittyivät huomattavasti, mutta jotkut jäivät jälkeen. Tämä ryhmä erottuu muista jo varhain (Aunola ym., 2004), ja opettajan onkin tärkeää pyrkiä tunnistamaan nämä oppilaat.

Tulosten perusteella heikko sanavarasto on yhteydessä myös koulun opetuskieltä ensikielenään puhuvien oppilaiden matemaattisten taitojen kehittymiseen. Onkin tärkeää, että opettajat ymmärtävät opettavansa kaikissa oppiaineissa sisältöjen lisäksi käsitteitä ja kielenkäyttöä (Peng ym., 2020).

Tulosten tulkinnessa on huomioitava, että oppilaat tekivät digitaaliset tehtäväsarjat koulujensa laitteilla. Vaihtelevilla laitekannoilla voi olla pientä vaikutusta tuloksiin. Lisäksi on syytä muistaa, että jälkimmäinen aineisto kerättiin koronapandemian keskellä vuonna 2020. On mahdollista, että pandemian vaikutukset ovat kohdistuneet erityisesti heikoimmassa asemassa oleviin lapsiin. Samalla on hyvä pitää mielessä, että kaikki ensimmäisen luokan arviointiin osallistuneet oppilaat eivät olleet mukana kolmannella luokalla. Jälkimmäinen arviointi ei tavoittanut vuosiluokan kerranneita tai esimerkiksi erityiskouluun siirtyneitä oppilaita.

Tasa-arvon kannalta on positiivista, että laskusujuvuuden kehittämisessä ei ollut eroja tyttöjen ja poikien välillä, mutta vaikuttaa siltä, että osa yhdeksännen luokan lopussa havaituista eroista (Metsämuuronen, 2023) saattaa syntyä jo ensimmäisinä kouluvuosina. Taitavimpien oppilaiden joukossa poikia oli enemmän kuin tyttöjä kuten myöhempinäkin ikävuosina (Hiltunen ym., 2023; Metsämuuronen & Nousiainen, 2021). Kiinnostava havainto kuitenkin on, että tyttöjä oli poikia enemmän taidoiltaan alimmissa kymmenyksissä. Tämä selittyy osin siitä, että analyysistä jätettiin pois erityistä tukea saavat oppilaat, joista valtaosa on poikia. Tulos herättääkin pohtimaan, eikö tyttöjen tuen tarvetta havaita samalla tavoin kuin poikien.

Kiitokset

Artikkeli on osittain tehty osana Suomen Akatemian rahoittamaa EDUCA-lippulaiva hanketta (#358924, #358947)

Lähteet

- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 427–435. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.003>.
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704. <https://doi.org/10.1080/1350293X.2014.996424>.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.69>.
- Clements, D. H., Fuson, K. C., & Sarama, J. (2019). Critiques of the common core in Early Math: A research-based response. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(1), 11–22. <http://dx.doi.org/10.5951/jresmetheduc.50.1.0011>.
- Hakkarainen, A., Haring, M., Holopainen, L., Lappalainen, K. & Mäkihonko, M. (2014). Matemaattisen ajattelun mallintaminen ja laskustrategioiden opettaminen: yleisen tuen interventio ensimmäisen luokan oppilaille. *NMI-Bulletin*, 24(1), 9–24. <https://bulletin.nmi.fi/wp-content/uploads/2016/02/Hakkarainen-A.-ym.pdf>.
- Hannula, M. M., & Lepola, J. (2006). Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä? Teoksessa J. Lepola & M. M. Hannula (toim.) *Kohti koulua. Kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys* (s. 129–149). Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja A:205. Painosalama.
- Hoff, D., Amland, T., Melby-Lervåg, M., Lervåg, A. & Protopapas, A. (2023). Early rapid naming longitudinally predicts shared variance in reading and arithmetic fluency, *Journal of Experimental Child Psychology*, 231, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2023.105656>.
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.

- Koponen, T., Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2019). Verbal counting skill predicts later math performance and difficulties in middle school. *Contemporary Educational Psychology*, 59, Article 101803. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.101803>.
- Koponen, T., Salmi, P., Torppa, M., Eklund, K., Aro, T., Aro, M., Poikkeus, A.-M., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2016). Counting and rapid naming predict the fluency of arithmetic and reading skills. *Contemporary Educational Psychology*, 44–45, 83–94. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2016.02.004>.
- Korpiää, H., Moll, K., Aunola, K., Tolvanen, A., Koponen, T., Aro, M. & Lerkkanen, M.-K. (2020). Early cognitive profiles predicting reading and arithmetic skills in grades 1 and 7. *Contemporary Educational Psychology*, 60. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.101830>.
- Lord, F. M., Novick, M. R. & Birnbaum, A. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Oxford, England: Addison-Wesley.
- Metsämuuronen, J. (2022). Typology of deflation-corrected estimators of reliability. *Frontiers in Psychology*, 13:891959. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.891959>.
- Metsämuuronen, J. (2023). *Matematiikkaa Covid-19-pandemian varjossa III*. Syventäviä analyyseja matematiikan 9. luokan arvioinnista keväällä 2021. Julkaisut 21:2023. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://www.karvi.fi/sites/default/files/sites/default/files/documents/KARVI_3123.pdf.
- Metsämuuronen, J. & Nousiainen, S. (2021). *Matematiikkaa Covid-19-pandemian varjossa*. *Matematiikan osaaminen 9. luokan lopussa keväällä 2021*. Julkaisut 27:2021. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://www.karvi.fi/sites/default/files/sites/default/files/documents/KARVI_2721.pdf.
- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. (2015). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. *NMI-bulletin*, 23(4), 12–25. https://bulletin.nmi.fi/wp-content/uploads/2015/11/Bulletin-4_2013_Mononen-ym.pdf.
- O’Dea, R. E., Lagisz, M., Jennions, M. D., & Nakagawa, S. (2018). Gender differences in individual variation in academic grades fail to fit expected patterns for STEM. *Nature communications*, 9(1), 3777. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-06292-0>.

- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Opetushallitus.
- Petrill, S., Logan, J., Hart, S., Vincent, P., Thompson, L., Kovas, Y., & Plomin, R. (2012). Math fluency is etiologically distinct from untimed math performance, decoding fluency, and untimed reading performance: Evidence from a twin study. *Journal of Learning Disabilities*, 45(4), 371–381. <https://doi.org/10.1177/0022219411407926>.
- Purpura, D. J., Hume, L. E., Sims, D. M. & Lonigan, C. J. (2011). Early literacy and early numeracy: The value of including early literacy skills in the prediction of numeracy development. *Journal of Experimental Child Psychology*, 110(4), 647–658. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2011.07.004>.
- Santos, S., Brownell, H., Coppola, M., Shusterman, A. & Cordes, S. (2023). Language experience matters for the emergence of early numerical concepts. *Npj science of learning*, 8(57). <https://doi.org/10.1038/s41539-023-00202-w>
- Sawaki, Y. (2016). Norm-referenced vs. criterion-referenced approach to assessment. Teoksessa D. Tsagari & J. Banerjee (toim.), *Handbook of second language assessment* (s. 45–60). DeGruyter Mouton.
- Susperreguy, M. I., Di Lonardo Burr, S. M., Xu, C., Douglas, P. H., Bourque, T., del Río, M. F., Salinas, V. & LeFevre, J.-A. (2024) The role of mathematical vocabulary in the development of mathematical skills for Spanish-speaking students. *Cognitive Development*, 70:101441. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2024.101441>.
- Räsänen, P., Aunio, P., Laine, A., Hakkarainen, A., Väisänen, E., Finell, J., Rajala, T., Laakso, M.-J., & Korhonen, J. (2021). Effects of gender on basic numerical and arithmetic skills: Pilot data from 3rd to 9th grade for a large-scale online dyscalculia screener. *Frontiers in Education*, 6:683672. <https://doi.org/10.3389/educ.2021.683672>.
- Ufer, S. & Bochnik, K. (2020). The role of general and subject-specific language skills when learning mathematics in elementary school. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41, 81–117 <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00160-5>.
- Ukkola, A. & Metsämuuronen, J. (2023). *Matematiikan ja äidinkielen taidot alkuopetuksen aikana – Perusopetuksen oppimistulosten pitkäaikaisarviointi 2018–2020*. Julkaisut 1:2023. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://www.karvi.fi/sites/default/files/sites/default/files/documents/KARVI_0123.pdf.

- Ukkola, A., Metsämuuronen, J. & Paananen, M. (2020). *Alkumittauksen syventäviä kysymyksiä*. Julkaisut 10:2020. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://www.karvi.fi/sites/default/files/sites/default/files/documents/KARVI_Alkumittaus.pdf.
- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Kotila, J., Lehtola, P., Nissinen, K., Puhakka, E., Pulkkinen, J., & Ström, A. (2020). *Perustaidoista vauhtia koulutielle. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen Kansainvälinen TIMSS 2019 -tutkimus Suomessa*. Koulutuksen tutkimuslaitos. <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/73016/4-TIMSS-2019%20JULKAISU.pdf>.
- Väisänen, E. & Aunio, P. (2016). Laskemisen sujuvuus toiselta neljännelle luokalle sekä yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. *Psykologia*, 51(4), 244–261.